Matematica a partire dagli insiemi o dalle categorie?

Gabriele Lolli

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Prima di discutere da dove partire è bene avere presente come la matematica è *arrivata* a insiemi e categorie. Questi concetti sono molto recenti, non erano concepiti come concetti matematici non solo da Euclide, ma neanche da Gauss o Cauchy (primo Ottocento), per i quali la domanda non avrebbe avuto senso, sarebbe stata letteralmente incomprensibile.

1. Matematica

Nella matematica, sia quella di scuola sia quella della ricerca, vige il pluralismo, si trattano tanti tipi di enti che apparentemente non hanno nulla a che vedere gli uni con gli altri: numeri naturali, figure geometriche (sono quelli maggiormente familiari agli studenti), diversi tipi di numeri, i complessi $a +ib$ ad esempio, o i quaternioni $a+ib+jc+kd$, funzioni, varietà geometriche, spazi di Hilbert, grafi, nodi, probabilità ..., e si potrebbe continuare.

A lungo numeri e figure sono stati i soli oggetti della matematica. Ma la proliferazione cresce d'intensità con l'avvicinarsi ai nostri giorni. Pochi probabilmente saprebbero dire che cosa accomuna tutti questi diversi enti sotto la stessa voce 'matematica'.

Tuttavia con il procedere (storico e sistematico) della matematica si nota una tendenza all'unificazione. Vengono concepite nozioni sotto cui cadono diversi tipi di oggetti o che si trasportano come tecniche da uno all'altro campo. Queste nozioni diventano nuovi oggetti matematici, più generali, o più astratti.

Illustriamo il fenomeno con il concetto di 'gruppo', senza pretese di fedeltà e completezza di ricostruzione storica.

1.1 Il concetto di gruppo

L'esperienza dell'addizione con i numeri interi **Z**, dove si è abituati alla validità e all'uso di relazioni come

$$m + (n + q) = (m + n) + q$$
$$m + 0 = m$$
$$m + (-m) = 0$$

e altre, si ripete con l'applicazione automatica, formale, delle stesse leggi in quella con i numeri razionali **Q** o con i reali **R** (tant'è che spesso non si sta a sottilizzare su quel tipo di numeri si usino); ma la si ritrova anche in domini non numerici, come nella somma dei vettori.

Addirittura la si riconosce nella moltiplicazione numerica, *mutatis mutandis*, cioè solo i nomi delle operazioni,

$$m \cdot (n \cdot q) = (m \cdot n) \cdot q$$
$$m \cdot 1 = m$$
$$m \cdot (m^{-1}) = 1.$$

sia pure con l'inverso definito solo per $m \neq 0$.

Analogie, o qualcosa di più, si riscontrano anche in altri campi, dove si estendono le operazioni dai numeri a complessi di numeri. Tra le matrici (di numeri reali) si può definire una somma con le medesime proprietà sopra ricordate, ma anche una moltiplicazione (righe per colonne), che è pure associativa ed ha una 'unità e l'inverso per le matrici diverse da quella nulla. Si possono tuttavia considerare situazioni ancora più lontane, dove non si abbiano operazioni nel senso numerico. Consideriamo le permutazioni di n oggetti; queste conviene concepirle non in modo statico, ma come un'operazione del permutare. Esse si possono rappresentare nel seguente modo: per n = 3, per fissare le idee, si indichi con ⟨i, j, k⟩ la permutazione di tre oggetti ordinati che porta l'i-esimo al primo posto, il j-esimo al secondo e il k-esimo al terzo (i, j, k ovviamente sono tre numeri distinti uguali a 1 o a 2 o a 3).

L'azione della permutazione ⟨2, 3, 1⟩ trasforma la terna di oggetti

$$abc \qquad \text{in} \qquad bca$$

e la permutazione ⟨1, 3, 2⟩ trasforma quest'ultima in

$$bac.$$

Dunque la loro *composizione* (con cui si intende l'applicazione consecutiva, prima quella scritta a destra, poi quella a sinistra) trasforma *abc* in *bac*, in simboli

$$\langle 1,3,2\rangle \circ \langle 2,3,1\rangle : abc \rightsquigarrow bac$$

esattamente come ⟨2, 1, 3⟩ ovvero

$$\langle 1,3,2\rangle \circ \langle 2,3,1\rangle = \langle 2,1,3\rangle$$

La permutazione ⟨1, 2, 3⟩ lascia invariata ogni terna, e si ha quindi

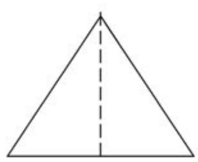
$$\langle i,j,k\rangle \circ \langle 1,2,3\rangle = \langle 1,2,3\rangle \circ \langle i,j,k\rangle = \langle i,j,k\rangle.$$

Ogni permutazione ha un'inversa, ad esempio

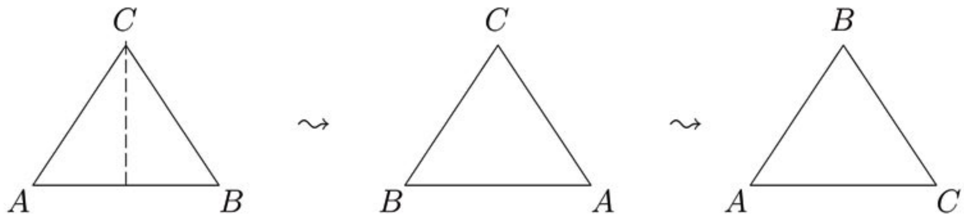
$$\langle 3,1,2\rangle \circ \langle 2,3,1\rangle = \langle 1,2,3\rangle.$$

Un altro caso è quello dei movimenti rigidi nel piano o delle simmetrie di un poligono regolare.

Dato un triangolo equilatero



indichiamo con m la rotazione di 120° in senso orario (intorno al baricentro) e con f la simmetria rispetto all'asse verticale. La composizione di due simmetrie sarà indicata scrivendole una a fianco dell'altra; così ad esempio mf (prima f poi m) ha il seguente effetto



dove le lettere sono state messe ai vertici per aiutare a vedere i movimenti, ma non sono significative: il triangolo è portato in sé da ogni movimento e da ogni composizione dei due movimenti m ed f.

Ci si può chiedere quante e quali diverse simmetrie ci siano. I sia l'dentità, nessun movimento. Si ha $f^2 = I$ e $m^3 = I$ (dove scriviamo f^2 per ff e analogamente per m), il che comporta che almeno i due elementi di base abbiano inverso, f stesso per f e m^2 per m.

Queste relazioni, semplificano la scrittura di diverse simmetrie ottenute per composizione iterata di m ed f, ad esempio

$$f^2m = m$$
$$m^2f^2m^2 = m$$

ma il numero di possibili iterazioni di applicazione successiva di m ed f resta infinito,

$$I, m, f, mf, fm, m^2, m^2f, mf^2, m^2f^2, mfm, fmf, fm^2f, \ldots$$

Questo è un caso del problema della parola: per due parole formate con le lettere f ed m, cioè due sequenze come quelle indicate sopra, decidere se sono uguali o no, non loro ovviamente, ma ciò che designano – e su questa base possibilmente stabilire quanti sono i movimenti distinti. Vedremo dopo come si può arrivare a una conclusione.

Poco alla volta, da questi e innumerevoli altri esempi, è nato il concetto di 'gruppo', anzi due, quello di gruppo e più tardi quello di 'monoide'. I gruppi sono caratterizzati dagli assiomi, che sono

proprietà associativa	$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
elemento neutro o identità	$x \circ e = e \circ a = a$
inverso	$a \circ (-a) = e$

che sono verificati in tutte le situazioni di somma e nelle permutazioni e nelle simmetrie, che abbiamo considerato, che offrono pertanto diversi esempi di gruppi, alcuni finiti altri infiniti.

I monoidi sono caratterizzati solo dai primi due assiomi, hanno cioè un'operazione binaria associativa e con un elemento neutro; sono verificati anche nelle situazioni di moltiplicazione che abbiamo indicato.

L'unificazione realizzata con un nuovo concetto ha un valore non solo perché introduce questo concetto, senza annullare quelli che vi cadono sotto, ma perché risulta anche essere una illuminazione: ah, era questo l'importante!

Di aspetti importanti ne esistono tuttavia sempre parecchi, per cui è possibile che altre illuminazioni siano non meno utili – e non incompatibili. Dove si riscontrano analogie, viene da indagare anche dove inizino le differenze. Negli esempi considerati, in quelli numerici vale per l'operazione in esame anche la

$$\text{proprietà commutativa} \qquad a \circ b = b \circ a$$

ma non negli altri, permutazioni, simmetrie e moltiplicazione di matrici, come si verifica con immediati controesempi.

Come si dimostrano le proprietà dei gruppi, quelle che valgono per tutti i gruppi? Da una parte derivandole dagli assiomi, dall'altra con ragionamenti generali sulle strutture (discusse dopo); spesso si lavora anche su singoli gruppi, poi si generalizza, se si può. Ad esempio un importante teorema sui gruppi finiti, di Lagrange, fu dimostrato inizialmente per le permutazioni, e solo in seguito fu esteso a tutti.

Anche se gli assiomi sono logicamente sufficienti per derivare i teoremi validi in ogni gruppo, ciascun gruppo particolare si avvale di tecniche esclusive che derivano dal primitivo interesse che ha portato a elaborare quello specifico concetto. Le proprietà numeriche giocano un ruolo nello studio dell'addizione, l'intuizione geometrica in quello delle simmetrie, e così via; e talvolta si ha una mutua fecondazione e un trasporto da un caso all'altro delle tecniche particolari.

Abbiamo sopra indicato con lettere i vertici del triangolo, per aiutare a vedere i movimenti. Indicare un triangolo con tre lettere per i vertici è un'abitudine radicata, ma non essenziale: un triangolo può anche essere individuato da tre rette, e in una trattazione analitica può essere meglio. Ma in questo caso è facile accorgersi che uno qualunque dei movimenti rigidi considerati produce una permutazione dei vertici, e dopo qualche considerazione si vede che tutte possono essere realizzate in questo modo; si ha precisamente la corrispondenza

$$\begin{array}{cc}
I & \langle 1,2,3\rangle \\
m & \langle 2,3,1\rangle \\
m^2 & \langle 3,1,2\rangle \\
f & \langle 2,1,3\rangle \\
mf & \langle 1,3,2\rangle \\
m^2 f & \langle 3,2,1\rangle
\end{array}$$

dalla quale deriva la soluzione del problema della parola: ogni parola su f ed m corrisponde a una delle sei permutazioni ed è quindi uguale a una delle sei simmetrie indicate.

Ciò significa che i due gruppi sono lo stesso gruppo o, come si dice, sono isomorfi; l'unica differenza consiste nelle notazioni.

La tavola delle possibili trasformazioni distinte, e della loro composizione risulta essere la seguente:

	I	m	m^2	f	mf	m^2f
I	I	m	m^2	f	mf	m^2f
m	m	m^2	I	mf	m^2f	f
m^2	m^2	I	m	m^2f	f	mf
f	f	m^2f	mf	I	m^2	m
mf	mf	f	m^2f	m	I	m^2
m^2f	m^2f	mf	f	m^2	m	I

come si può verificare considerando le seguenti relazioni rilevanti:

$$\begin{aligned} fm &= m^2f \\ mfm &= f \\ fmf &= m^2 \\ fm^2f &= m \end{aligned}$$

che si possono controllare geometricamente, dalle quali si ricavano le altre semplificazioni necessarie.

In questo modo si dimostra anche che le simmetrie considerate, generate da f ed m, comprendono tutte quelle che lasciano invariato il triangolo: si sarebbe potuto pensare che anche le simmetrie rispetto agli altri due assi dovessero essere prese in considerazione, ma non è necessario: lo si può provare esaminando tutti i casi, ma attraverso il collegamento con le permutazioni si ottiene il risultato in un colpo solo, e senza lavoro. (mf e m^2f sono le simmetrie rispetto alle altre due bisettrici.)

1.2 Il metodo assiomatico

Nello stesso modo sono nati altri concetti, che ora costituiscono l'argomento dell'algebra astratta. Ma non solo in algebra si è diffusa questa impostazione: anche in analisi non ci si basa più sui reali, o sui complessi, ma ad esempio su spazi metrici, concetto nato da un'analoga generalizzazione.

Tali movimenti di unificazione e astrazione alla fine dell'Ottocento sono diventati le increspature superficiali di più estesi movimenti complessivi. Uno di questi è la ripresa e la riformulazione del metodo assiomatico, prima ristretto alla sola geometria, ora esteso a tutte le teorie relative ai nuovi concetti, e reinterpretato in modo da ammettere sempre una pluralità di interpretazioni[1]. Questo in larga misura è il *deus ex machina* che permette la proliferazione, come strumento tecnico – le spinte derivano invece dalla sempre più estesa matematizzazione.

La formazione di concetti come quello di gruppo realizzavano unificazioni parziali, o locali, ma anche nello stesso tempo una autonomizzazione delle relative aree: strutture algebriche, strutture geometriche e argomenti numerici risultavano in una certa misura indipendenti, per lo meno quanto alla loro giustificazione. Ne risultò una tensione, se non un contrasto, con un'altra tendenza e un'aspirazione a una unificazione globale, o a una grande unificazione.

2. Insiemi

Forse la più importante motivazione di questa tendenza è stata la necessità di precisare il concetto di «funzione». All'inizio del calcolo infinitesimale, le funzioni erano le curve disegnabili senza interruzioni, quindi a un livello un po' più formale le espressioni algebriche: per Eulero le funzioni erano le espressioni algebriche formate con variabili, costanti e i simboli di operazione.

Jakob Bernoulli dice esplicitamente che

> Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in qualunque maniera da quella quantità variabile e da numeri o quantità costanti.

Per le necessità delle applicazioni e dello sviluppo armonioso della teoria si è via via ampliato il campo delle funzioni, arricchendo gli strumenti analitici che per mettevano di definirle, ad esempio con le serie di potenze, le serie di Fourier, e poi con limiti di serie.

L'aspirazione era quella di dominare matematicamente tutte le funzioni. Ma restava sempre sfuggente, proprio alla luce delle successive estensioni, il concetto di «funzione arbitraria», che pure si sarebbe voluto catturare, e che Leibniz aveva anticipato parlando di «una quantità formata in qualche modo da indeterminate e costanti».

Hermann Weyl riassumeva sconsolato, ancora avanti nel Novecento:

> Nessuno può spiegare cosa è una funzione, ma quello che importa in matematica è questo: una funzione f è data quando ad ogni numero reale a è associato un numero b ..., detto il valore della funzione per l'argomento a.

La soluzione soddisfacente fu trovata identificando le funzioni con il loro grafo, cioè con l'insieme delle coppie $\langle x, y\rangle$ delle coordinate dei punti sulle curve. Questa idea generalizzava quella di una tabella di dati, non necessariamente legati da una legge, o da una legge nota, accordandosi anche al caso in cui la legge fosse nota e analiticamente esprimibile.

La soluzione fu considerata accettabile per la circostanza che nel frattempo era diventato familiare e diffuso il linguaggio insiemistico. Gli insiemi di punti della retta, o di numeri reali, con sempre maggior frequenza erano stati oggetto di attenzione, nello studio dei punti critici, di discontinuità o massimo, delle funzioni. All'inizio disturbavano persino le funzioni con in numero finito di punti di discontinuità, poi se ne sono incominciate a studiare con infiniti punti critici (e si è arrivati ai frattali, alla curva di Peano), e dalla topologia della retta è nata la teoria degli insiemi.

La definizione insiemistica di funzione è un sottoprodotto di minimo peso rispetto alle novità introdotte da questa teoria, ed è tarda rispetto alla costruzione della teoria, ma forse quella che ha fatto di più per convincere i matematici ad accettare la nuova impostazione.

3. La grande unificazione

Una conseguenza della definizione insiemistica di “funzione”è stata la possibilità di avere anche una nozione insiemistica soddisfacente, senza lacune dovute alla presenza di altre nozioni primitive indefinite, di “struttura”.

Si può dire ora cosa è un gruppo: un insieme G con un'operazione binaria, una unaria e un elemento speciale, l'elemento neutro: $\langle G, \circ, -, e\rangle$. Ma un'operazione a sua volta non è altro che una funzione, in questo caso $\circ \subseteq (G \times G) \times G$ e $- \subseteq G \times G$. Anche le relazioni, come quelle di ordine, sono insiemi.

Si presenta così la possibilità di un avvicinamento, anche se in una tensione non del tutto pacifica, con l'impostazione assiomatica. Le strutture come i gruppi sono i modelli delle teorie relative, cioè le strutture del tipo adeguato nelle quali gli assiomi sono veri. Gli insiemi forniscono una semantica per le teorie assiomatiche.

Forniscono anche strumenti per ottenere risultati su tutte le strutture di un certo tipo, ad esempio i gruppi.

3.1 matematica

Con i gruppi e tutte le altre algebriche algebriche (e geometriche) si è abbastanza avanti nel ricondurre ogni discorso matematico agli insiemi; restano i numeri, anzi questo è stato l'argomento trainante a partire dalla metà dell'Ottocento.

Anche per i numeri si è trovata una definizione in termini di insiemi. Dopo i numeri naturali, a partire da questi, si definiscono con operazioni insiemistiche gli altri sistemi: gli interi, i razionali, i reali[2].

Nel corso del Novecento la grande unificazione è stata realizzata per mezzo del concetto di ‘insieme’. L'unificazione si è compiuta attraverso una riduzione a un unico concetto o, se si vuole, mediante l'introduzione di un nuovo concetto matematico[3].

Il riduzionismo è stato un forte impulso, in parte esterno. Perch´e paradossalmente quello che ha decretato il successo del linguaggio insiemistico è che la parola ‘insieme’ era un termine generico, simile nella sua funzione a quello di ‘cosa’; per un po' ha avuto i suoi sinonimi come ‘collezione’, ‘aggregato’, ‘classe’, ‘mucchio’ ...

La familiarità con i passaggi logici che fanno intervenire questa parola è una competenza logica e linguistica importante; di per s´e non è teoria degli insiemi e non implica l'assunzione di un riduzionismo forte. Se la si coltivasse senza chiamarla «teoria degli insiemi» o «insiemistica» si farebbe opera utile senza metterla a repentaglio con il suo alone filosofico.

Le unificazioni parziali hanno un senso, una motivazione interna alla crescita autonoma della matematica, quella totale un po' meno. Da un punto di vista tecnico, del fare matematica, le persone continuano in effetti a essere pluraliste, se non per una oggettiva invasione di metodi insiemistici, che si adattano allo studio delle strutture. Ma gli oggetti matematici non sono concepiti direttamente in termini di insiemi; nascono quando si matematizza un nuovo campo, e sono inizialmente descritti nei termini dei problemi da cui nascono.

I concetti matematici sono presentabili in termini insiemistici solo nella misura in cui quello degli insiemi è un linguaggio generale per parlare di cose indeterminate, e nella misura in cui si diffonde sempre più l'abitudine a usarlo; ma normalmente esso interviene, in modo rigoroso, solo in un secondo tempo, se interviene del tutto. Qualche volta è più comodo e naturale un linguaggio specifico più ricco di suggestioni. Naturalmente gli argomenti matematici non sono indipendenti, e le intersezioni ci sono: un geometra qualche calcolo ogni tanto deve pur farlo. Ma i collegamenti non richiedono necessariamente definizioni uniformi: non c'è bisogno di dire che una pezza di lana e una di cotone o di seta sono stoffa, se si devono fare confronti, anzi chiamarle tutte stoffa può provocare equivoci.

3.2 filosofica

La grande unificazione ha invece un senso (se pur discutibile e discusso) da un punto di vista filosofico: appare naturale cercare di far ricadere tutta l'attivià matematica (che in fondo è classificata come una disciplina unica e dà origine a una corporazione unica) sotto una sola manifestazione di capacità umane, come rispondente a una sola definizione. Tanto meglio se poi si scopre che tutto dipende da quasi nulla, cioè da capacità che paiono appartenere al bagaglio minimo universale degli esseri umani: la competenza necessaria risulta, nella fondazione insiemistica, una mossa cos`ı generica come quella di «mettere insieme delle cose», cioè la capacità di categorizzazione che è presente anche nella formazione dei nomi comuni. La divaricazione delle discipline all'interno di questo quadro unitario consisterebbe di sfumature, e stili differenti, magari anche fortemente marcati, tuttavia mai con il carattere di totale alterità.

4. Categorie

Per quel che riguarda le categorie, la loro storia è più recente, e la definizione del loro status non è univoca. Mentre la teoria degli insiemi è stata studiata, sperimentata e limata per molti decenni, con la partecipazione di tutto il mondo matematico, i categoristi sono di meno e hanno avuto finora meno tempo per esercitare la loro influenza.

I concetti fondamentali sono nati intorno alla metà del Novecento, nei lavori di S. Eilenberg e S. Mac Lane sulla omologia e coomologia, in questioni di topologia algebrica, ma all'inizio si presentano solo come un contributo di «idee e metodi che possono essere usati anche da chi lavora in altri campi»[4].

In seguito, «con la recente intensificazione del loro uso, è venuta in primo piano la questione di una adeguata fondazione. Qui gli esperti sono ancora in disaccordo»[5].

La nascita e il successivo sviluppo delle nozioni categoriali si collocano nel contesto della matematica avanzata. Il loro corretto apprezzamento non può prescindere da tali conoscenze. Tuttavia l'ambizione totalizzante di alcuni cultori ha fatto s`ı che anche la matematica elementare ne venisse investita, cosicch´e è possibile provare a dare un'idea del punto di vista categoriale, seppur pallida e forse poco convincente.

Il nuovo linguaggio (categorie, funtori, trasformazioni naturali, controvarianza, funtori aggiunti ...) non vuole sostituire quello tradizionale ma, inizialmente, vi si aggiunge, lo integra. Grazie soprattutto a felici notazioni, esso induce tuttavia un punto di vista diverso, distinguendo tra una considerazione locale e una globale, tra una interna ed una esterna.

4.1 Locale e globale

Consideriamo un esempio in dettaglio. L'unione di due insiemi X e Y si definisce di solito come

$$X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}.$$

Le proprietà dell'unione si dimostrano tutte inizialmente sulla base di questa definizione.

Tra l'altro, si arriva a dimostrare che $X \cup Y$ è il più piccolo insieme (rispetto a $\subseteq$) che contiene (nel senso di $\subseteq$) sia X sia Y, ossia soddisfa le tre condizioni:

$$X \subseteq X \cup Y \qquad Y \subseteq X \cup Y$$

$$\forall Z(X \subseteq Z \wedge Y \subseteq Z \rightarrow X \cup Y \subseteq Z)$$

Ad esempio per $X \subseteq X \cup Y$ si ragiona in questo modo: se $x \in X$ allora per la legge logica $A \rightarrow A \vee B$ (B qualunque) si ha $x \in X \vee x \in Y$. Analogamente, anche se meno diretta, la terza parte.

Questa proprietà è globale nel senso che si riferisce a come si colloca $X \cup Y$ in relazione agli altri insiemi dell'universo, e non a cosa succede dentro a $X \cup Y$; essa può essere assunta come definizione, per la condizione «il più piccolo ...», che individua un unico insieme.

Se si usa una rappresentazione diagrammatica mediante frecce, dove le frecce continue indicano funzioni date (in questo caso iniezioni) e frecce tratteggiate funzioni che esistono in funzione di quelle date, la definizione si riassume in

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left] & \\
X \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right] & X \cup Y \arrow[dr, dashed] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

dove $X \xrightarrow{i_1} X \cup Y$ e $Y \xrightarrow{i_2} X \cup Y$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "i_2"] \\ X \arrow[r, "i_1"'] & X \cup Y \end{tikzcd}$$

traducono le prime due condizioni, e il resto del diagramma

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[dd, bend left] \\ X \arrow[drr, bend right] & X \cup Y \arrow[dr, dashed] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

la terza.

Analogamente per l'intersezione, il prodotto cartesiano e altre operazioni. Perch´e sarebbero preferibili queste definizioni? La differenza tra i due tipi di definizione è che nella prima si caratterizza un insieme attraverso condizioni sui suoi elementi, nella seconda attraverso condizioni suoi suoi rapporti con altri insiemi.

Ne viene un modo diverso di impostare ragionamenti e dimostrazioni. Nei discorsi sulle operazioni insiemistiche, con le definizioni usuali, si lavora con frasi del tipo $x \in X$, e quantificatori sugli elementi, e hanno un ruolo importante le regole logiche dei connettivi.

Ad esempio per dimostrare che $X \cup \varnothing = X$ si osserva che da una parte $X = X \cup \varnothing$; per la già dimostrata $X \subseteq X \cup Y$ e viceversa: se $x \in X \cup \varnothing$ allora $x \in X \vee x \in \varnothing$, ma $x \notin \varnothing$ per la regola logica del sillogismo disgiuntivo, quindi $x \in X$.

Questo tipo di argomenti logici presentano la difficoltà, anche psicologica, che mentre si vuole parlare di un livello (quello delle variabili maiuscole) le dimostrazioni devono scendere a un livello inferiore (quello delle variabili minuscole).

L'impostazione categoriale non è di per sé più semplice, quanto segue un ordine diverso. La proprietà $X \cup \varnothing = X$ ad esempio viene dal diagramma

$$\begin{tikzcd} & \emptyset \arrow[d, "i_2"] \arrow[dr, bend left] & \\ X \arrow[r, "i_1"'] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & X \cup \emptyset \arrow[r, dashed] & X \end{tikzcd}$$

che si ottiene per specializzazione da quello della definizione[6].

Il nuovo simbolismo dei diagrammi, nel quale è sostituito dall'iniezione N e riportato nell'ambito generale delle funzioni comporta anche che le frasi di base sono del tipo $X \longrightarrow Y$, che esprimono una relazione tra oggetti che sono insiemi. Il vantaggio logico è che, salendo di tipo gli oggetti del discorso, si semplificano le frasi relative, che coinvolgono meno livelli: spesso affermazioni insiemisticamente articolate, se traducibili in un diagramma, diventano di tipo combinatorio. Dal punto di vista psicologico, si impara «come vivere senza usare gli elementi»[7].

Nei ragionamenti le regole logiche sono sempre le stesse, ma il nuovo livello induce diversi percorsi e diverse strategie di pensiero. E si finisce per vedere altre cose. Le definizioni categoriali mettono in evidenza proprietà universali delle costruzioni. Nel caso del prodotto cartesiano

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

la coppia $\langle p_1, p_2\rangle$ è universale tra le coppie di funzioni da un insieme a X e Y perché ogni tale coppia $\langle f, g\rangle$ si fattorizza in modo unico attraverso la coppia $\langle p_1, p_2\rangle$ e una funzione h.

4.2 Il concetto di categoria

Il concetto di "categoria"non comporta l'aggiunta di un ulteriore tipo di enti, ma si applica a quelli tradizionali: si parla della categoria dei gruppi, della categoria degli spazi topologici e di altre, inclusa la categoria degli insiemi[8]. Ogni tipo di struttura dà origine alla sua categoria.

Ma una categoria non è soltanto la totalità di tutte le strutture di un certo tipo, essa è a sua volta strutturata dalle mutue relazioni tra gli elementi della totalità.

Ad esempio, data la categoria degli insiemi, che cosa possiamo chiederci su di essi? Possiamo ad esempio confrontarli a coppie rispetto alla cardinalità, e chiederci quindi se esiste una iniezione di uno nel secondo, o una suriezione; e possiamo chiederci quante ce ne sono; in alcuni casi potrebbe essercene una sola (se il secondo insieme ha un solo elemento).

Alcune strutture speciali si caratterizzano proprio attraverso le relazioni che hanno con tutti le altre. Nella categoria dei gruppi, il gruppo che consiste del solo elemento neutro ha la caratteristica di essere immergibile in ogni gruppo, in un modo unico, ed è tale che ogni gruppo si può applicare in un solo modo su di esso.

In tutti questi casi si vede che le domande o le risposte si riferiscono a funzioni. Tali relazioni si esprimono infatti per mezzo del concetto centrale di ogni indagine di stile categoriale, che è quello di morfismo tra oggetti. Gli oggetti possono essere molto complicati, di solito sono appunto strutture, ma queste vengono per cos`ı dire considerate dall'esterno, e ciascuna è un «oggetto» della categoria.

La nozione di «morfismo», e la parola stessa, viene dall'algebra, da quella di «omomorfismo», che inizialmente è stato definito, in termini insiemistici, come una funzione che conserva la struttura (la forma).

Nel caso dei gruppi, un omomorfismo è una funzione $f: G \longrightarrow H$ tale che (con un simbolismo trasparente)

$$\begin{cases} f(x \circ_G y) = f(x) \circ_H f(y) \\ f(e_G) = e_H \\ f(-_G x) = -_H f(x) \end{cases}$$

Nel caso degli spazi topologici, i morfismi sono le funzioni continue; nel caso degli insiemi, che non hanno una struttura da conservare, sono le funzioni usuali.

Dal punto di vista categoriale queste mappe sono nozioni primitive rette da pochi assiomi della teoria generale delle categorie e da assiomi specifici per ogni categoria, che individuano le loro proprietà in grande.

Gli assiomi generali di una categoria sono i seguenti:

1. esistono due tipi di enti, gli oggetti e i morfismi
2. a ogni morfismo f sono associati due oggetti detti rispettivamente il dominio dom(f) e il codominio cod(f) del morfismo (che viene indicato con f: dom$(f) \longrightarrow$ cod(f))
3. per ogni oggetto a esiste un morfismo 1_a detto identità su a
4. per ogni coppia di morfismi f e g tali che dom(g) = cod(f) esiste un morfismo composizione indicato con $g \circ f$: dom(f) $\longrightarrow$ cod(g)
5. la composizione è associativa
6. $1_b \circ f = f = f \circ 1_a$ se a = dom(f) e b = cod(f).

Per esprimere in modo operativamente utile queste condizioni si è rivelato essenziale l'uso dei diagrammi, e la notazione con le frecce, o meglio sono nati assieme.

I diagrammi vanno letti in modo da esprimere affermazioni, e quindi in un modo dinamico. Quando si disegna un diagramma di frecce si intende, anche se non lo si dice, che sia commutativo, vale a dire che seguire percorsi diversi da un'origine a un termine dia lo stesso risultato. Così ad esempio che $g \circ f: X \longrightarrow Y$ sia la composizione di $f: X \longrightarrow Z$ e $g : Z \longrightarrow Y$ è espresso dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Si dice anche che $g \circ f$ si fattorizza attraverso f e g.

Le frecce e il loro uso per indicare funzioni precedono di poco le categorie; il primo che ha usato la notazione $f: X \longrightarrow Y$ per le funzioni, in senso insiemistico, è stato W. Hurewicz in topologia, intorno al 1945.

La costruzione di diagrammi quali quelli sopra mostrati ha fatto fare un salto di qualità all'uso delle frecce. Si ricordi l'osservazione di Henri Poincaré:

> Nelle scienze matematiche una buona notazione ha la stessa importanza filosofica di una buona classificazione nelle scienze naturali.

Una conferma viene da Gregorio Ricci Curbastro:

> Lo stesso si può dire dei metodi, perché è proprio dalla loro scelta che dipende la possibilità di costringere una moltitudine di fatti senza alcun legame apparente tra loro a raggrupparsi secondo le loro affinità naturali.

Si può dire che questo è un caso in cui «una notazione ha condotto a un concetto»[9].

4.3 Morfismi

Inizialmente si è apprezzata soprattutto la capacità di unificazione: «diagrammi di frecce unificano e semplificano proprietà di sistemi matematici»[10]. Quindi si è scoperta la riformulazione in termini di morfismi di tanti concetti di base; è sorprendente quanto spesso le definizioni interne possano essere riformulate e generalizzate in termini di morfismi, senza parlare di elementi (per i categoristi, sempre).

Ad esempio alla nozione di funzione iniettiva corrisponde quella di monomorfismo. Un morfismo $i : Y \longrightarrow Z$ è un *monomorfismo* se per ogni coppia di morfismi $f, g : X \longrightarrow Y$ tali che $if = ig$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "i"] & Z \end{tikzcd}$$

si ha $f = g$. Si dice anche che è cancellabile (da $if = ig$) a sinistra.

Un morfismo $i : X \longrightarrow Y$ è un *epimorfismo* (generalizzando la nozione di funzione suriettiva) se per ogni coppia di morfismi $f, g : Y \longrightarrow Z$ tali che $fi = gi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

si ha $f = g$: cancellabile a destra.

A un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ si associano due possibili inversi, un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tale che $gf = 1_X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

che si chiama una *retrazione* di f, e un morfismo $h : Y \longrightarrow X$ tale che $fh = 1_Y$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "1_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

h si chiama *sezione* di f: l'assioma di scelta si può formulare dicendo che ogni f ha una sezione.

Se f ha una retrazione, f è un monomorfismo (esercizio).

Un isomorfismo è un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ per cui esiste $g : Y \longrightarrow X$ tale che gf

$= 1_X$ e $fg = 1_Y$.

Il precedente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[d, "i_2"] \arrow[dr, bend left] & \\
X \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right, "1_X"'] & X \cup \emptyset \arrow[dr, dashed] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

si legge nel seguente modo: se si dà per acquisito che $\varnothing$ è un *oggetto iniziale*, nel senso che per ogni W esiste un solo morfismo da $\varnothing$ a W[11], ne segue che i_1 ha una retrazione, quindi è un monomorfismo, e poi con altre considerazioni che X e $X \cup \varnothing$ sono di fatto isomorfi.

4.4 Funtori

La costruzione del prodotto cartesiano (e in generale tutte quelle che generalizzano le definizioni insiemistiche) è detta *funtore* perché si applica (nell'impostazione categoriale) sia a insiemi che a funzioni.

In generale un funtore T tra due categorie, o da una categoria in se stessa, è un'applicazione che manda oggetti dell'una in oggetti dell'altra, e morfismi tra due oggetti dell'una in morfismi tra i corrispondenti oggetti dell'altra, in modo da essere un morfismo di categorie, cioè che $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$, e $T(1_a) = 1_{T(a)}$. Significa che la corrispondenza tra gli oggetti non è arbitraria o astrusa, in quanto rispetta le relazioni che gli oggetti hanno tra di loro.

Ad esempio nella categoria degli insiemi se ad ogni insieme X si associa l'insieme potenza (o insieme di tutti i sottoinsiemi) $\mathscr{P}(X)$, allora in modo automatico e naturale a ogni funzione $f: X \longrightarrow Y$ si associa una funzione

$$\mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(Y)$$

che a ogni $Z \subseteq X$ associa $\{y \in Y : \exists x \in Z\, (f(x) = y)\}$, quello che di solito si indica impropriamente $f(Z)$, o propriamente $\mathrm{im}(f|Z)$.

Ma in modo altrettanto naturale si associa una funzione

$$\mathscr{P}'(f) : \mathscr{P}(Y) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$$

che a ogni $Z \subseteq Y$ associa $\{x \in X : \exists y \in Z\, (f(x) = y)\}$, o $f^{-1}(Z)$.

Il primo è un esempio di funtore *covariante*, che è propriamente la definizione sopra riportata, il secondo di funtore *controvariante* (perché inverte la direzione delle frecce).

In algebra abbondano i funtori. Ad esempio, senza entrare nei dettagli, per ogni gruppo G l'insieme dei prodotti dei commutatori $xyx^{-1}y^{-1}$ è un sottogruppo normale di G, e il quoziente dà un gruppo abeliano; la corrispondenza è un funtore perché un omomorfismo di gruppi manda commutatori in commutatori.

Invece se si associa a ogni gruppo il suo centro, cioè il sottoinsieme $\{a \in G : xa=ax$ per ogni $x\}$, non si ha un funtore, perché un omomorfismo può mandare elementi del centro fuori del centro.

Un *isomorfismo* di categorie è un funtore $T : C \longrightarrow B$ da C a B che è una biiezione, sia sugli oggetti sia sulle frecce (o c'è un isomorfismo se c'è un funtore $S : B \longrightarrow C$ tale che entrambi i composti $S \circ T$ e $T \circ S$ sono il funtore identico).

Una nozione più generale è quella di equivalenza di categorie. Dati due funtori $S, T : C \longrightarrow B$, una *trasformazione naturale* $\tau : S \longrightarrow T$, o un morfismo di funtori, è una funzione che assegna a ogni oggetto c di C una freccia $\tau c : Sc \longrightarrow Tc$ in modo che per ogni freccia f : $c \longrightarrow c'$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} Sc \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ Sc' \arrow[r, "\tau c'"'] & Tc' \end{tikzcd}$$

commuti.

Se ogni τc è invertibile si ha una equivalenza naturale, o un isomorfismo naturale. Un esempio è il seguente, nel confronto tra la categoria **Ford** degli ordinali finiti, ovvero dei numeri naturali (si ricordi che $n = \{0, 1, \ldots n\text{-}1\}$) con quella degli insiemi finiti **Fset**. Siccome ogni ordinale è un insieme, l'inclusione S è un funtore **Ford** $\longrightarrow$ **Fset**. A ogni insieme finito X si può associare $\sharp X$ il numero di elementi di X, e si può scegliere una biiezione θ_X tra X e $\sharp X$.

A ogni funzione $f : X \longrightarrow Y$ tra insiemi finiti si può quindi associare una corrispondente funzione $\sharp f : \sharp X \longrightarrow \sharp Y$ con $\sharp f = \theta_Y f (\theta_X)^{-1}$; il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "f"'] & \sharp X \arrow[d, "\sharp f"] \\ Y \arrow[r, "\theta_Y"'] & \sharp Y \end{tikzcd}$$

commuta e $\sharp$ è un funtore. Se X è un ordinale finito, si può prendere come θ_X l'identità, in modo che $\sharp \circ S$ è il funtore identico $I_{\mathbf{Ford}}$ in **Ford**. Viceversa $S \circ \sharp$ non è il funtore identico su **Fset**. Tuttavia il diagramma di sopra mostra che $\theta : I_{\mathbf{Fset}} \longrightarrow S \circ \sharp$ è un isomorfismo naturale.

In una tale situazione si dice che $\sharp$ e S stabiliscono un'*equivalenza* di categorie, che come nell'esempio possono essere molto diverse in grandezza.

4.5 Teorie algebriche

Vediamo ora come si presentano le teorie algebriche in contesto categoriale. Le teorie algebriche studiano di fatto proprietà di operazioni, espresse dagli assiomi, quasi sempre in forma equazionale. Si pensa di solito che gli assiomi parlino degli elementi di una struttura, ma in realtà parlano delle operazioni; è stato il rendersi conto di questo fatto, e che le proprietà delle operazioni sono le stesse in diverse situazioni dove gli elementi non hanno nulla a che vedere gli uni con gli altri, che ha permesso di elaborare i concetti algebrici. Queste teorie sono quindi adatte a una presentazione categoriale. Le uguaglianze si traducono nella commutatività di diagrammi.

Un monoide ad esempio, cioè una struttura con un'operazione binaria associativa e un elemento neutro, si può presentare come prima approssimazione come un insieme con due funzioni

$$\circ : M \times M \longrightarrow M \qquad \eta : 1 \longrightarrow M$$

dove insiemisticamente 1 = {0} e η (0) è l'elemento neutro e (ma 1 è usato anche per la funzione identica, senza indice quando è ovvio). η (0) è la funzione che sceglie un elemento speciale di *M*.

L'associatività si può esprimere in via intermedia con il disegno

$$\begin{tikzcd}
\langle x, y, z\rangle \arrow[r, "1\times\circ"] \arrow[d, "\circ\times 1"'] & \langle x, y\circ z\rangle \arrow[d, "\circ"] \\
\langle x\circ y, z\rangle \arrow[r, "\circ"'] & (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)
\end{tikzcd}$$

che non è un vero diagramma categoriale, essendo riferito agli elementi.

Ma basta ora, per caratterizzare un monoide in termini di morfismi, chiedere che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
M\times M\times M \arrow[r, "1\times\circ"] \arrow[d, "\circ\times 1"'] & M\times M \arrow[d, "\circ"] \\
M\times M \arrow[r, "\circ"'] & M
\end{tikzcd}$$

così come il seguente per l'elemento neutro

$$\begin{tikzcd}
1\times M \arrow[r, "\eta\times 1"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M\times M \arrow[d, "\circ"] & M\times 1 \arrow[l, "1\times\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

dove λ e ρ sono le ovvie biiezioni.

Per avere un gruppo allora, un gruppo essendo un monoide con inverso, basta aggiungere la richiesta di una funzione $\zeta : M \longrightarrow M$ tale che il seguente diagramma commuti (dove δ è la diagonale e $M \longrightarrow 1$ è l'unico morfismo di un insieme su un singoletto):

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & M\times M \arrow[r, "1\times\zeta"] & M\times M \arrow[d, "\circ"] \\
1 \arrow[rr, "\eta"'] & & M
\end{tikzcd}$$

In una impostazione rigorosamente categoriale non ci si limita ovviamente a proporre i diagrammi di sopra come abbreviazioni: ci si mette in una categoria con opportune proprietà di chiusura, e in essa *M* è un oggetto della categoria, e le frecce sono morfismi. Questa definizione quindi ne condensa molte, al variare della categoria: se siamo nella categoria degli spazi topologici gli stessi diagrammi definiscono un gruppo topologico.

Questa circostanza è importante perché in matematica di solito si studiano strutture miste; ad esempio se si ha un'operazione, e un modo di misurare la distanza, ci si chiede se argomenti vicini hanno valori vicini: se due numeri sono vicini, i loro quadrati quanto sono vicini? si considera cioè la continuità delle funzioni, e la struttura è algebrica e topologica insieme.

Se gli oggetti *M* sono strutture, l'aggiunta di $\circ$ arricchisce la struttura stessa: si osservi ad esempio che un monoide nella categoria dei gruppi abeliani è un anello[12]: l'operazione $\circ$ del monoide è la moltiplicazione, che a differenza dell'addizione, non ha (sempre) inverso; l'addizione è implicita nel fatto che siamo nella categoria dei gruppi abeliani, quindi *M* è già dotato di suo di un'operazione che chiamiamo addizione.

5. La fondazione categoriale

Anche i numeri naturali possono essere caratterizzati in termini diagrammatici. Anche i numeri naturali possono essere caratterizzati in termini diagrammatici. L'oggetto «numeri naturali»è presentato, in categorie con opportune proprietà di chiusura, come un oggetto N con una coppia di morfismi

$$1 \xrightarrow{o} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$

tale che per ogni inserire i simboli seguenti ma meglio allineati $1 \xrightarrow{x} a \xrightarrow{f} a$ esiste un unico *h* per cui

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[dd, dashed, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[dd, dashed, "h"] \\
1 \arrow[ur, "o"] \arrow[dr, "x"'] & & \\
& a \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

In questo diagramma sono condensate due proprietà sostanziali dei numeri naturali. Una è la minimalità di N tra i sistemi semplicemente infiniti (secondo la definizione di Dedekind). L'altra è il principio di ricorsione, dimostrato sempre da Dedekind per le funzioni ricorsive primitive (che poi si estende alle ricorsive). Queste due proprietà risultano equivalenti, come si sapeva già dimostrare, per il semplice fatto che sono espresse dallo stesso diagramma.

Sulla base di situazioni di questo tipo i sostenitori delle categorie hanno iniziato a vederla come una teoria fondazionale nel senso tradizionale, una teoria a cui tutte le altre possono ricondursi.

Addirittura si può cercare di definire in esse tutti gli strumenti del pensiero logico. L'esempio della definizione di unione può far immaginare come anche gli operatori logici possano essere concepiti in termini categoriali. La definizione del prodotto ad esempio dà la congiunzione in una categoria nella quale gli oggetti siano le proposizioni e i morfismi le deduzioni.

I categoristi vedono in questo la prosecuzione del processo che nel corso dell'Ottocento ha portato a rendere centrale in matematica il concetto di funzione, ma che sarebbe stato deviato verso una presentazione statica dalla versione insiemistica delle funzioni, e dalla prevalenza di questo linguaggio. Un esempio di come una versione statica può essere sostituita da una dinamica è la definizione di preordine. Insiemisticamente, un preordine è un insieme M con una relazione $\leq \subseteq M \times M$ che sia riflessiva e transitiva.

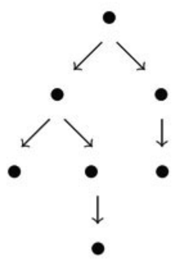
Dal punto di vista categorico, il preordine $\langle M, \leq \rangle$ è esso stesso una categoria con M come insieme degli oggetti e tale che per ogni coppia a e b di oggetti *hom(a, b)* non è vuoto e ha un solo morfismo se e solo se $a \leq b$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "1_a"] \arrow[r] & b \arrow[loop right, "1_b"] \end{tikzcd}$$

Le identità esistono per la proprietà riflessiva. La composizione esiste per la proprietà transitiva:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\leq"] \arrow[rr, bend right, "\leq"'] & b \arrow[r, bend left, "\leq"] & c \end{tikzcd}$$

La soluzione proposta per trasformare un preordine in una categoria non sorprende chi è familiare con le strutture degli alberi. Un albero è in effetti un preordine, che si suole rappresentare in questo modo



In questo esempio particolare finito ogni nodo a ha al più due successori immediati, cioè elementi b tali che $a \leq b$ e per nessun c diverso da a e b vale $a \leq c \leq b$; se b è un successore immediato di a si usa la rappresentazione $a \rightarrow b$; c'è una sola radice, vale a dire un elemento che non ha predecessori, e ci sono foglie, elementi senza successori. La crescita verso il basso è una consuetudine convenzionale consolidata.

Un funtore covariante tra due preordini corrisponde ad una funzione monotona, che conserva l'ordine.

6. Da dove incominciare

Alla domanda se si debba incominciare dagli insiemi o dalle categorie rispondiamo distinguendo: per fare matematica, da nessuno dei due, a meno che non si lavori proprio in una delle due teorie. Per una fondazione della matematica, da una qualunque, a seconda delle preferenze. Per l'insegnamento, la risposta più ragionevole è ancora: da nessuno dei due.

I concetti matematici nascono e vivono in modo autonomo e indipendente (finché non si scoprono fecondi e inaspettati collegamenti) a seconda degli atti di matematizzazione che li generano, delle intuizioni e degli usi che li guidano. Cercare di ridurli a pochi concetti, o a uno solo, al di là dei collegamenti che sono scoperti nella ricerca e che si rivelano utili e significativi, può essere una forzatura.

Le frecce sono molto usate e giustamente come ausilio didattico, questo forse può far nascere equivoci sull'importanza didattica delle categorie; ma si presti attenzione che nello spirito categoriale ogni freccia sta per una funzione, non per l'azione su un elemento, mentre questa è la rappresentazione utile nell'introduzione del concetto di funzione.

Non sembra plausibile che la definizione di monomorfismo come di un morfismo semplificabile a sinistra sia più comprensibile e utile della definizione di funzione iniettiva con l'azione sugli elementi, dove si vede che due frecce non convergono mai a colpire lo stesso elemento (meglio la rappresentazione delle non iniettive, con il controesempio). Tuttavia la considerazione esterna aiuta nel processo di astrazione, quando è maturo.

Vale per le categorie quello che si è detto per l'insiemistica; è bene fare tesoro dei suggerimenti utili, ma si eviti quando non è necessario di reificarle in una teoria, che tra l'altro è dubbio quale sia per i suoi stessi cultori.

NOTE

[1] Si veda [2].

[2] Si veda [1].

[3] Nelle critiche filosofiche al riduzionismo in genere, in vari campi, si trascura di solito questo aspetto.

[4] Si veda [3].

[5] Ivi.

[6] Più avanti faremo qualche commento aggiuntivo.

[7] Si veda [3].

[8] Poi, nella foga fondazionale, si cerca di dare un senso anche alla considerazione della categoria delle categorie.

[9] Si veda [3].

[10] Ivi.

[11] Nella categoria degli insiemi, questa diventa una definizione alternativa esterna dell'insieme vuoto. Un oggetto terminale 1 è un oggetto tale che per ogni oggetto X esiste un solo morfismo $X \longrightarrow 1$; nella categoria degli insiemi i singoletti $\{x\}$ sono terminali.

[12] Il tipico anello è Z.

BIBLIOGRAFIA

[1] Lolli, G., *Dagli insiemi ai numeri*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

[2] Lolli, G., *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, Bologna 2004.

[3] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York 1971.