

## SCIENZA E CULTURA IN HENRI POINCARÉ

ORNELLA POMPEO FARACOVÌ

*Centro Studi Enriques*

Il convegno *Scienza e cultura in Henri Poincaré*, promosso dal Centro Studi Enriques con il patrocinio del Conseil International de Philosophie et Sciences Humaines dell'Unesco, svolto il 29 Novembre 2013 a Pisa presso l'Associazione La Limonaia, si è collegato alle celebrazioni del centenario della morte del matematico-filosofo, mettendo a fuoco gli aspetti salienti delle sue ricerche matematiche e della sua filosofia scientifica.

### 1. Uno straordinario lascito matematico

Come ha affermato Marco Franciosi, del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, in una relazione su *Henri Poincaré e la matematica del Novecento*, nessuno di quanti si affacciano agli studi di matematica può evitare di imbattersi nel nome del matematico francese. La sua impronta è unica nella matematica contemporanea: forse solo Hilbert ha provocato, in modo diverso, un impatto altrettanto importante. Sebbene non abbia avuto allievi, Poincaré ha lasciato un'eredità estremamente significativa, che solo oggi può dirsi davvero compresa. Si è occupato di teoria del caos, fisica matematica, topologia algebrica, analisi matematica, teoria dei numeri: una varietà di campi che testimonia di una grande versatilità. Il denominatore comune della sua opera sta nell'eleganza delle formule e nella centralità dei concetti geometrici: alla geometria è affidato lo scopo di farci conoscere le relazioni tra gli oggetti studiati, consentendo di cogliere matematicamente l'estetica della natura. Lo scienziato secondo Poincaré non studia la natura perché è utile, ma perché prova piacere nel farlo, in quanto essa è meravigliosa.

Molti i temi legati direttamente al suo nome: mappa di Poincaré, serie di Poincaré, caratteristica di Eulero-Poincaré, dualità di Poincaré, gruppo di Poincaré, congettura di Poincaré. Quest'ultima si riferisce al modo di riconoscere, attraverso invarianti algebrici, la forma di un oggetto di qualsiasi dimensione. È uno dei sette problemi che il Clay Institute nel 2000 ha indicato come caratterizzanti il nostro secolo, mettendo in palio un milione di dollari per chi ne avesse risolto uno. Il problema era già stato affrontato da numerosi studiosi, in particolare americani, inglesi e russi, che nel corso del '900 avevano risolto molti tasselli del complicato puzzle, utilizzando teorie e approcci differenti. L'ultima tessera è stata individuata nel 2003 dal russo Grigori Perelman, che con una piccola nota su internet ha individuato i passi necessari alla soluzione. Il suo approccio è stato sviluppato da diversi studiosi, e la dimostrazione è stata portata in

fondo. Perelman si è però rifiutato di ricevere il premio ed ha anche respinto la medaglia Fields, massimo riconoscimento mondiale per la matematica.

È impossibile non citare il premio internazionale assegnato a Poincaré nel 1889 dal re di Svezia, Oscar II, per il trattato sul problema dei tre corpi. Il problema era quello della stabilità del sistema solare, nel quale tre o più corpi interagiscono con perturbazioni gravitazionali che ne modificano le traiettorie teoriche. Le traiettorie effettive non corrispondono a quelle previste: ma quali soluzioni matematiche possono ricondurre le perturbazioni all'interno delle traiettorie? Il concorso richiedeva di «rappresentare le coordinate di ciascun punto sotto forma di serie che procedono secondo qualche funzione nota del tempo e che convergono uniformemente per ogni valore reale della variabile». Ricevuto il premio per l'originalità degli argomenti introdotti e la prosa efficace, nel predisporre il testo per la pubblicazione Poincaré si avvide di aver commesso un errore significativo; per correggerlo, sviluppò nuove osservazioni con le quali, utilizzando una geometria non euclidea, pose le basi della teoria del caos.

## 2. La filosofia scientifica di Poincaré

Come ha notato Gaspare Polizzi nella relazione su *Poincaré e la filosofia scientifica*, alla sua morte Poincaré era più noto al largo pubblico per gli scritti di filosofia scientifica che non per le ricerche matematiche e fisiche. La sua indagine epistemologica era iniziata con un articolo del 1887, anno del suo primo corso di Fisica matematica alla Sorbonne, e si era espressa nel volume *La science et l'hypothèse*, pubblicato nel 1902 da Flammarion nella «Bibliothèque de Philosophie Scientifique» e divenuto presto un *best seller*, vendendo in pochi anni sedicimila copie. Sulla scia di tale successo, l'autore pubblicò altre tre raccolte di saggi, presto tradotte in diversi paesi: *La valeur de la science* (1905); *Science et méthode* (1908); *Dernières pensées* (pubblicata postuma nel 1913). Questi scritti ebbero grande impatto internazionale, influenzando i promotori del Circolo di Vienna (ai quali il matematico francese appariva «una specie di Kant liberato dai rimasugli della scolastica medievale e unto con il crisma della scienza moderna»), e suscitando un confronto critico con Federigo Enriques. Anche il giovane Einstein lesse e apprezzò *La science et l'hypothèse* in traduzione tedesca, pur se i suoi rapporti con Poincaré rimasero competitivi e poco esplicitati, nel quadro dell'elaborazione del principio di relatività, che il matematico francese intese sempre – a differenza di Einstein – come evidenza sperimentale.

Nella sua prima grande opera epistemologica, i *Problemi della scienza* (1906), Enriques dialoga intensamente con *La science et l'hypothèse*. Tra i due scienziati-filosofi, che si conobbero a Parigi nel 1907, in occasione del conferimento a Enriques e a Francesco Severi del Prix Bordin, non mancarono le affinità. Entrambi maturarono una riflessione filosofica in rapporto con i problemi posti dalle nuove geometrie, si interrogarono sulle relazioni tra fisica e matematica e si confrontarono con le grandi svolte, quantistica e relativistica, della fisica del Novecento. Dal punto di vista filosofico gli esiti furono però differenti: Poincaré contribuì alla nascita del convenzionalismo,

valorizzando il primato della dimensione relazionale del sapere matematico e rintracciando nelle ipotesi il motore dello sviluppo scientifico; Enriques si orientò verso un razionalismo sperimentale con rapporti privilegiati con la realtà fisica e psicologica. Il comune tentativo di ridefinire la scienza e i suoi rapporti con la filosofia li rese protagonisti importanti del movimento di filosofi-scienziati, che fu attivo in Europa fra i due secoli, anche attraverso le pagine di due agguerrite riviste, che li ebbero ambedue come collaboratori: la «Revue de Métaphysique et de Morale» in Francia (promotrice della fondazione, nel 1901, anche con il contributo di Poincaré, della *Société Française de Philosophie*) e «Scientia» in Italia (fondata nel 1907 dallo stesso Enriques, che nel 1906 darà vita anche alla Società Filosofica Italiana).

Dell'epistemologia geometrica di Poincaré va sottolineato il legame con la concezione kantiana dello spazio come forma dei fenomeni: il concetto di "gruppo di trasformazioni" consente infatti di dare un fondamento virtuale allo spazio geometrico, pur se tale forma si colloca nell'intelletto e non nella sensibilità. Per Poincaré esistono varie geometrie, ma la sola coerente con lo spazio fisico è quella euclidea, che permette il più semplice inquadramento dei fatti sperimentali. Questa concezione non gli impedisce una spregiudicata utilizzazione di geometrie non euclidee per la soluzione dei problemi analitici, come il problema dei tre corpi, che trattò mostrando come, nel concreto lavoro dei matematici, le geometrie non euclidee fossero utili alla generalizzazione dell'analisi, e contribuendo al loro inserimento in una visione analitica del mondo fisico, espresso in equazioni differenziali.

Particolare rilievo hanno le pagine che pongono le basi della teoria del caos deterministico. La argomentazione può essere riassunta così: una causa trascurabile, che ci sfugge, determina un effetto considerevole, che viene giudicato come dovuto al caso. Se conosciamo con precisione le leggi della natura e la situazione iniziale dell'universo, potremmo prevedere esattamente la situazione dell'istante successivo. Ma anche se le leggi naturali non avessero segreti per noi, non potremmo conoscere la situazione iniziale se non approssimativamente. Se siamo in grado di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, questo è in verità tutto ciò di cui abbiamo bisogno; consideriamo allora il fenomeno come regolato da leggi, e dunque prevedibile. Piccole differenze nelle condizioni iniziali possono però generarne di grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore in rapporto alle prime può produrne uno enorme sui secondi; la predizione diventa allora impossibile e parliamo di fenomeno fortuito. Ad esempio: perché le previsioni meteorologiche incontrano tante difficoltà? Le grandi perturbazioni hanno di solito luogo nelle regioni in cui l'atmosfera è in equilibrio instabile. I meteorologi vedono questa instabilità, e sanno che un ciclone sorgerà da qualche parte; ma dove, non sono in grado di dirlo; un decimo di grado in più o in meno in un punto qualsiasi, e il ciclone scoppia qui e non là, provocando devastazioni in zone che avrebbe altrimenti risparmiato. Anche qui troviamo un contrasto tra una causa minima, non apprezzabile dall'osservatore, e effetti considerevoli, che sono a volte degli spaventosi disastri.

La riflessione sulla complessità naturale conduce all'idea di un universo non riconducibile ad un ordine prestabilito: la complessità diventa un problema ontologico, e non più soltanto la proiezione di un deficit di conoscenza. Si potrebbe stabilire una proporzione 'filosofica': Cartesio sta a Leibniz, come Laplace a Poincaré. Un secolo esatto separa l'immagine di un universo totalmente prevedibile da quella di un universo fatto di contingenze e di cammini inattesi. Al determinismo di Cartesio e al demone di Laplace, Poincaré oppone curve e superfici che sono le matrici dirette delle teorie del "caos deterministico". La caoticità del comportamento di un sistema sottoposto all'azione di forze non lineari diventa la norma; la regolarità dei moti celesti un'eccezione. I fenomeni possono essere descritti dalle equazioni differenziali della dinamica classica; ma la determinazione matematica non ne garantisce la predicibilità. Si tratta di definire grandezze matematiche che individuino il tipo di disordine che si sta studiando, con la consapevolezza che i vari tipi di disordine non si possono prevedere, ma solo descrivere e classificare. Poincaré ha scoperto che dall'ordine deterministico si genera il caos; tuttavia la teoria del caos non altera per lui lo schema deterministico, perché parte dalle leggi del moto, e tende a determinare un ordine nascosto nel disordine, una "struttura ordinata del disordine".

Sulle strane pagine costellate di punti della memoria sul problema dei tre corpi sono tracciate figure nuove, dalle quali nasce una scienza qualitativa dello spazio, che abbandona l'idea di una prevedibilità universale. Questa immagine del mondo riemerge un secolo dopo Poincaré, quando le sue figure diventano familiari. A partire dal 1954, con l'integrazione del problema dei tre corpi di George Birkhoff (1913) e gli studi della scuola di Andrej Kolmogorov, che usa algoritmi realizzati con la potenza di calcolo dei computer, l'imprevedibilità dell'evoluzione di un sistema complesso diventa oggetto di calcolo. Con l'informatizzazione delle matematiche la riflessione sul caos si appropria di algoritmi potenti, gli unici a poter esprimere nei dettagli il mondo intravisto da Poincaré. Il computer introduce nell'apparato matematico l'approssimazione emersa negli strumenti di misura, ed è esso stesso un esempio di "caos deterministico": basta tener conto di un decimale in più o in meno, perché appaiano soluzioni del tutto diverse; si possono però calcolare un'enorme quantità di soluzioni numeriche per equazioni prive di soluzioni analitiche. La simulazione si colloca in una zona intermedia tra teoria ed esperimento fisico: dalla teoria trae le considerazioni per la costruzione di modelli da studiare tramite algoritmi; dall'esperimento le caratteristiche necessarie per mettere in evidenza un fenomeno, eliminando la contaminazione di effetti spuri. Il computer non è più un semplice strumento di calcolo, ma 'crea' fenomeni fisici ideali attraverso la simulazione. La rappresentazione del nuovo piano complesso descritto da Poincaré può allora apparire nello schermo con i pixels del computer: il piano di scrittura non è più quello invariabile della geometria cartesiana, ma un paesaggio che fluttua a ogni istante. Il supporto della nostra scrittura assomiglia a un quadro *pointilliste* alla maniera di Georges-Pierre Seurat (o dei Macchiaioli), a uno spartito di musica impressionista.

Nelle pagine di Poincaré c'è l'autorappresentazione di un mondo complesso e ad assetto variabile: ma siamo ancora lontani dalla soluzione di tutti i problemi da lui formulati un secolo fa. Nel 1900 il figlio di Charles Darwin, George, conferendogli la medaglia d'oro della *Royal Astronomical Society* per le ricerche di meccanica celeste, disse che esse avrebbero fornito per cinquant'anni materiale ai ricercatori futuri. La previsione è risultata falsa per difetto.

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] Frank, Ph., *La scienza moderna e la sua filosofia* (1941), tr. it. di G. Picca, il Mulino, Bologna 1973
- [2] Polizzi, G. *Poincaré nei Problemi della scienza: un incontro “geometrico”*, in, *Federigo Enriques e la cultura europea*, a cura di P. Bussotti, Agorà Publishing, Lugano 2008,
- [3] Poincaré, H. *La scienza e l'ipotesi*, in Id., *Opere epistemologiche*, a cura di G. Boniolo, Piovani Ed., Abano Terme 1989, vol. I.