Edizioni dell'Assemblea
143

Ricerche

Argante Ciocci

Ritratto di Luca Pacioli

REGIONE TOSCANA

Consiglio Regionale

Giugno 2017

CIP (Cataloguing in Publication)
a cura della Biblioteca della Toscana Pietro Leopoldo.

Ritratto di Luca Pacioli / Argante Ciocci ; [introduzione di Eugenio Giani ; premessa di Matteo Martelli]. – Firenze : Consiglio regionale della Toscana, 2017

1. Ciocci, Argante 2. Giani, Eugenio 3. Martelli, Matteo
510.92
Pacioli, Luca

Volume in distribuzione gratuita

www.centrostudimariopancrazi.it
facebook /@CentroStudiMarioPancrazi

In copertina:
Il "Doppio ritratto" nell'interpretazione di Tommaso Brogini
(nonfinitoartgallery@gmail.com)

Consiglio regionale della Toscana
Settore "Biblioteca e documentazione. Archivio e protocollo.
Comunicazione, editoria, URP e sito web. Tipografia"
Progetto grafico e impaginazione: Daniele Russo
Pubblicazione realizzata dal Centro stampa del Consiglio regionale della Toscana
ai sensi della l.r. 4/2009
Giugno 2017

ISBN 978-88-5617001

Sommario

«Luca Pacioli – nonostante non abbia mai disdegnato l'insegnamento dell'aritmetica commerciale – è stato tra le menti più illuminate e feconde se non la più illuminata e feconda – dell'alta matematica tra la fine del XV e l'inizio del XVI secolo»

Esteban Hernández-Esteve

Introduzione

In occasione del cinquecentesimo anniversario della morte, il Centro Studi "Mario Pancrazi" di Sansepolcro ha proposto al Consiglio regionale la pubblicazione, nelle Edizioni dell'Assemblea, di un accurato volume celebrativo della figura di Luca Pacioli, il frate francescano natio di Borgo Sansepolcro (come allora si chiamava il paese natale di Piero della Francesca), vissuto nella seconda meta del quindicesimo secolo.

Un uomo di religione, Luca, ma soprattutto un uomo di scienza, unanimemente riconosciuto, oggi, come il fondamentale divulgatore della matematica e della geometria euclidea presso i luoghi simbolo dell'epopea rinascimentale. Uno studioso che, in quello straordinario tempo, incrociò la propria attività con quella delle grandi menti del periodo, come Leonardo da Vinci, traendone reciproco beneficio.

Il volume, al cui autore Argante Ciocci va il merito di aver davvero messo a fuoco lo scienziato ed il suo tempo, si inserisce nell'ambito di una serie di iniziative che, in questo 2017, il Centro Studi "Pancrazi", con la collaborazione ed il sostegno di enti ed istituzioni, ha voluto promuovere per rendere onore ad un personaggio straordinariamente utile alla crescita della conoscenza diffusa delle scienze matematiche.

Per Pacioli, infatti (ce lo ricorda bene questa pubblicazione), tutte le arti si compenetravano con la matematica e la geometria, essendo, ad esempio, la pittura inscindibilmente correlata alla corretta conoscenza delle proporzioni e dei rapporti geometrici.

Pacioli, insomma, come ci fa ben capire questa pubblicazione, merita un posto importante fra i protagonisti del Rinascimento. La sua figura è patrimonio della cultura. La sua toscanità un vanto che ci onoriamo di contribuire a celebrare, e questa pubblicazione ne sarà ottima testimonianza.

Eugenio Giani
Presidente del Consiglio regionale della Toscana

Premessa

Il Centro Studi "Mario Pancrazi" pubblica nella sua Biblioteca la monografia, organica e puntuale, che Argante Ciocci ha dedicato al frate del Borgo in occasione delle celebrazioni del Cinquecentenario della morte di Luca Pacioli (1517-2017).

Il Centro, fin dalla sua costituzione, ha scelto di perseguire – sulla scia del Prof. Pancrazi – l'obiettivo di promuovere la cultura delle matematiche, e di conseguenza delle scienze, delle arti e delle lettere, sull'esempio del Pacioli, convinto assertore del "ruolo fondamentale dell'aritmetica e della geometria nelle arti meccaniche, nel commercio e nei mestieri" (A. Ciocci), conseguente sostenitore dell'idea che le matematiche garantiscono "esattezza conoscitiva" nell'esercizio delle arti liberali, del trivio e del quadrivio, e nella costituzione di tutte le discipline universitarie dell'epoca (giurisprudenza, medicina, filosofia, teologia), perché il mondo è stato creato «per mezzo dei numeri, delle figure geometriche e delle proporzioni».

La monografia di Ciocci, agile e informata, racconta la vita del frate del Borgo, esamina con equilibrio e competenza gli scritti del Maestro di Sansepolcro, disegna il profilo di un grande intellettuale del Rinascimento, notissimo in tutto il mondo come padre della ragioneria moderna, matematico tra i più insigni del tempo, filosofo della natura.

Il volume è destinato sia agli studiosi, sia alle scuole, sia agli appassionati della civiltà rinascimentale, in cui non solo risplende la bellezza dei manufatti dei pittori, degli scultori e degli architetti, ma si affermano le ragioni matematiche nella produzione della cultura e nell'interpretazione dell'Universo. Perché – per il frate del Borgo, ma anche per molti protagonisti di quell'epoca – il mondo ha una struttura geometrica, è scritto con la lingua della Matematica, che "non è soltanto la madre delle scienze e delle arti, ma costituisce anche il linguaggio con il quale Dio ha scritto il libro del mondo" (A. Ciocci). I caratteri discendono dalla geometria, la sintassi dalle proporzioni, a cominciare dalla "divina": la *sezione aurea*.

*Matteo Martelli**
Presidente del Centro Studi "Mario Pancrazi"

Prologo
Ritratto di un poliedrico intellettuale del Rinascimento

Fig. 1 – *Ritratto di Luca Pacioli*, attr. a Jacopo de' Barbari (1495), Napoli, Museo di Capodimonte

Nel Museo di Capodimonte, a Napoli, è conservato un dipinto che raffigura un frate matematico, affiancato da un giovane uomo con lo sguardo fisso verso l'osservatore. Il frate francescano sta illustrando la proposizione 8ª del XIII libro degli *Elementi* di Euclide: con l'indice della mano sinistra segue il testo euclideo; con la destra disegna su una lavagna la figura geometrica relativa al teorema, un triangolo equilatero inscritto nel cerchio. Il frate è Luca Pacioli, il giovane alla sua sinistra è uno degli enigmi di questo dipinto tanto celebre quanto problematico. Sul tavolo trova spazio anche un ponderoso volume dalla coperta rossa, sormontato da un dodecaedro regolare di legno. Si tratta della *Summa de arithmetica,* *geometria, proportioni et proportionalita*, una delle opere matematiche più importanti del Rinascimento, dedicata a Guidubaldo da Montefeltro e stampata a Venezia nel 1494, dodici anni dopo l'altro incunabolo presente nel ritratto: gli *Elementa in artem geometriae et Campani commentationes* editi a Venezia da Erhard Ratdolt nel 1482 .

In alto a destra, appeso ad un filo quasi impercettibile c'è un cristallino corpo semiregolare, riempito a metà d'acqua, costituito da 26 basi, delle quali 18 sono quadrati e 8 triangoli equilateri.

In questo ritratto del frate sono presenti tutte le operazioni necessarie a trasformare gli oggetti astratti descritti nel testo in oggetti concreti tridimensionali: la proposizione degli *Elementi*, indicata dalla mano sinistra di Pacioli, riceve una prima visualizzazione grafica nella lavagna a destra del frate, sul bordo della quale è inciso il nome "Euclides". La successiva operazione del passaggio dall'astratto al concreto è simbolicamente rappresentata da due solidi: il dodecaedro ligneo posto alla sinistra del frate e il corpo di 26 basi, appeso per un filo, come i solidi delle tavole disegnate da Leonardo per illustrare il *Compendium de divina proportione* di Luca Pacioli.

Il rombicubottaedro, colmo a metà d'acqua, rifrange per tre volte, sulla sua superficie di cristallo, quella che pare la facciata di un palazzo (il Palazzo Ducale di Urbino?). Il virtuosismo ottico con il quale l'autore del ritratto raffigura riflessioni e rifrazioni del palazzo rinascimentale sul rombicubottaedro rimanda al personaggio che affianca Pacioli, e che, sulla scia delle descrizioni di ambiente urbinate, è stato identificato da molti studiosi nel giovane Guidubaldo da Montefeltro, al quale il frate dedica la *Summa*.

Dall'inizio del XX secolo ad oggi l'autografia del *Doppio ritratto* e la sua datazione sono state oggetto di diversi studi che hanno condotto ad uno stallo delle ricerche e ad esiti comunque incerti e controversi. Il conflitto delle interpretazioni si gioca in gran parte sul cartiglio poggiato sul tavolo vicino alla *Summa*.

È autentico o si tratta di un'aggiunta postuma? L'analisi ai raggi X effettuata in occasione della mostra *Leonardo e il leonardismo* a Napoli e a Roma nel 1983 aveva messo in dubbio l'autenticità del cartiglio. Una successiva analisi radiografica e un'indagine riflettografica all'infrarosso eseguite in occasione della mostra urbinate su Piero della Francesca nel 1992 ne hanno invece confermato l'autenticità. Se il cartiglio è autentico, come interpretare la scritta e la data?

Le due abbreviazioni "IACO. BAR." sembrano indicare le iniziali del pittore. Quale pittore? In molti indicano il nome di Jacopo de' Barbari, che nello scorcio finale del XV secolo si trovava a Venezia. Diversi dubbi, tuttavia, emergono sulla decifrazione del cartiglio in merito al significato della parola "VIGENNIS"; dubbi che inevitabilmente si ripercuotono sull'identificazione dell'autore del ritratto.

L'attenzione maniacale per i dettagli, la maestria nell'uso della luce, una certa abilità nel padroneggiare la prospettiva e alcuni tratti distintivi della pittura veneziana sembrano ricondurre, però, a Jacopo de' Barbari, che nel 1495 era a Venezia proprio nei mesi immediatamente successivi alla stampa della *Summa;* mesi nei quali anche frate Luca, che è il vero ideatore del piano iconografico del *Doppio ritratto*, si trovava nella città lagunare.

La scelta del libro di Euclide aperto su due proposizioni del XIII libro, la presenza del dodecaedro che sormonta l'elegante e raffinata coperta della *Summa*, gli strumenti da disegno (gesso, cancellino, compasso, squadra, penna, astuccio e calamaio) e il gioco matematico proposto allo spettatore non possono che venire dalla mente di frate Luca. Ma qual è il significato della sfida che Pacioli ci lancia?

Per quanto riguarda il piano iconografico del ritratto una delle chiavi di lettura può essere rappresentata dal rombicubottaedro. Questo poliedro archimedeo è un marchio di fabbrica di Pacioli. Non è presente, infatti, nella sezione del *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca dedicata ai poliedri e incorporata nella *Summa* né nel *Libellus de quinque corporibus regularibus*. Compare per la prima volta invece tra le tavole del *Compendium de divina proportione* (1498).

Di questo poliedro frate Luca fornisce una breve descrizione nel capitolo LIII. Pacioli così lo presenta:

> "Un altro corpo Excelso Duca da li già ditti assai dissimile se trova; detto de 26 basi, da principio e origine ligiadrissimo derivante. Dele quali 18 sonno quadrate equilatere e rectangule, e le 8 sonno triangule equilatere similmente & equiangule".

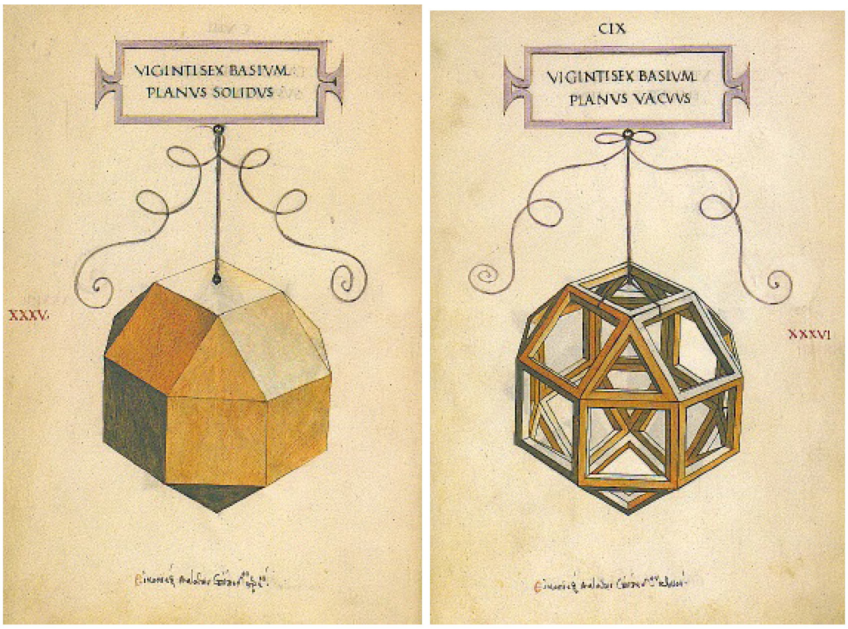
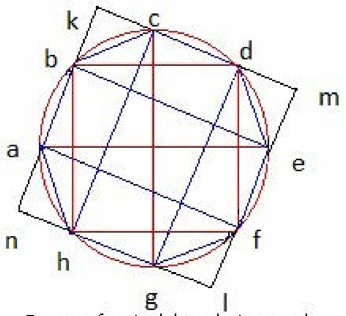


Fig. 2 - Tavole XXXV-XXXVI del *Compendium de divina proportione* (Biblioteca Ambrosiana di Milano ms. 170 sup.) : corpo di 26 basi (rombicubottaedro), solido e vacuo

Nella descrizione del numero dei lati e degli angoli solidi che compongono il corpo frate Luca precisa:

> "E dele 48 sue linee, 24 sonno comune ali trigoni e ali quadrati peroché de quelli 18 quadrati asiemi secondo la debita oportunità agionti, de necessità ne resultano quelli 8 trianguli formati, sì commo che degli altri abscisi de sopra s'è detto. E l'origine de questo sia dalo exacedron uniforme secondo ogni sui parti tagliato, commo similmente al'occhio la sua material forma ci demostra. E fia la sua scientia in molte considerationi utilissima a chi bene la sa accomodare, maxime in architectura".

Frate Luca afferma che il rombicuboattedro deriva dal cubo, tagliato con piani passanti a 1/3 di ciascuno spigolo. Il corpo di 26 basi appare, infatti, se visto in pianta proiettata su un piano passante per il centro e parallelo alla superficie superiore del cubo, come un tamburo ottagonale, sopra e sotto il quale vengono ricavate rispettivamente 5 facce quadrate (che però appaiono rettangolari perché proiettate in pianta), e 4 triangolari equilatere (anche esse distorte dalla proiezione). Per ricavare il solido di 26 basi a partire dal semplice cubo, occorrerebbe prima di tutto calcolare le misure dei lati degli otto quadrati che costituiscono il tamburo a base ottagonale e poi tagliare gli spigoli del cubo in modo da ottenere tutte le 18 facce quadrate.



In nero: faccia del quadrato del cubo originario, visto dall'alto. In blu: corpo di 26 basi visto in pianta e proiettato sul piano passante per il centro del cubo e parallelo alla faccia superiore. In rosso: costruzione del tamburo ottagonale.

Per fare tutto ciò in modo rigoroso occorre conoscere, innanzi tutto, la costruzione dell'ottagono e i rapporti tra il diametro del cerchio circoscritto e il lato dell'ottagono:

$$\frac{d}{l_O} : \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

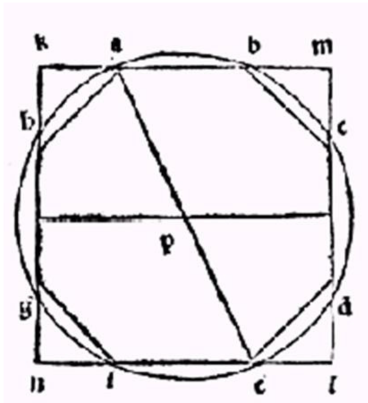
In secondo luogo bisogna tagliare gli spigoli del cubo ad una misura tale che la somma dei quadrati dei due cateti del triangolo (an^2+nh^2), base del prisma da asportare (in nero), sia uguale al quadrato del lato dell'ottagono (ah^2) (in blu). Le operazioni necessarie per risolvere il problema della determinazione del lato dei 18 quadrati erano sicuramente alla portata di Pacioli, dato che vengono svolte anche per il caso 42 della prima parte del *Libellus* di Piero, e per la costruzione del cubo tronco (problema V, trattato 4° del *Libellus)*. Si suppone, del resto, che anche nei tagli necessari per ottenere i precedenti poliedri in legno frate Luca abbia eseguito, per via algebrica, dei calcoli e non si sia lasciato guidare semplicemente da tentativi a occhio.

Il rombicubottaedro, formato da 18 facce quadrate e 8 triangolari, visto in pianta, appare formato da un tamburo a base ottagonale, sopra e sotto il quale vengono poi disegnate le restanti 18 facce.

La stessa pianta viene adoperata da Piero per costruire il cubo tronco (6 ottagoni+8 triangoli) .

"E se il corpo de 14 base, cioè 6 octangule e 8 triangulare equilatere contenuto de la spera che il suo axis è 10, del lato, de la superficie e de la quadratura se vole cercare.

Formase tale corpo – scrive Pacioli traducendo il *Libellus* di Piero – dal cubo, tagliando i suoi octo anguli per forma che i lati del cubo remaghino octagoni equilateri et questo dividere faremo con proportione. Et per che ogni circulo che contene la superficie octagona è quella proportione dal diametro del circulo al lato del octagono in quello descritto che è da la possanza de 2 a 2 m R2 $[2^2:2\sqrt{2}]$".



Con gli stessi criteri Pacioli avrebbe potuto ottenere il tamburo ottagonale, sul quale costruire il rombicubottaedro. Il procedimento, da qui in poi, sarebbe stato diverso. Per ottenere il corpo di 26 basi occorre, infatti, intersecare questa pianta con una uguale, giacente su un piano perpendicolare ad essa e passante per il centro del cubo di base. Da questa intersezione è poi possibile ricavare, con le proiezioni sulle facce del cubo, tutte le misure cercate.

Fig. 3 – Rombicubottaedro, dal *Ritratto di Luca Pacioli*
(Napoli, Museo di Capodimonte)

Comunque siano andate le cose, il *Libellus* di Piero costituiva inevitabilmente il testo matematico alla base delle descrizioni dei poliedri contenute nella *Divina proportione*. Nell'opera di Piero erano, infatti, contenuti i calcoli di misure e proporzioni, necessarie per la costruzione dei solidi, regolari e semiregolari. Quando frate Luca accenna alla pratica di "algebra & almucabala, a rari nota" non si riferisce certo all'algebra insegnata nelle scuole d'abaco e sicuramente conosciuta da molti, ma allude ad un'abilità di calcolo conosciuta soltanto da pochi matematici. È forse ai lunghi e a volte complicati calcoli di Piero che si sta riferendo.

Pacioli nell'affrontare problemi con dodecaedri e rombicubottaedri probabilmente si accorse di una meravigliosa coincidenza: i due solidi infatti sono inscrivibili nella stessa sfera. Gli enigmatici numeri che si trovano nella tavoletta su cui sta scrivendo Pacioli (478+936+621=2034) sono un *rebus,* la cui plausibile soluzione può essere trovata soltanto supponendo che le cifre si riferiscano ai valori degli spigoli dei due poliedri e dei raggi delle sfere che li circoscrivono, usati nei calcoli preliminari svolti da frate Luca prima di arrivare alla scoperta che lo spigolo di un dodecaedro è uguale a quello di un rombicubottaedro iscritto nella stessa sfera.

Il piano iconografico del doppio ritratto trova quindi nel solido di 26 basi la sua chiave di lettura. Gli indizi disseminati nel dipinto, infatti, convergono tutti nel legare insieme la geometria di Euclide, il dodecaedro di legno che sormonta la *Summa*, e il meraviglioso rombicubottaedro di cristallo che, come gli altri poliedri disegnati da Leonardo nel *Compendium de divina proportione,* sembra appeso al soffitto con un laccio.

Allo studio dei poliedri, del resto, è legato anche il testo che frate Luca sta illustrando: il XIII libro degli *Elementi* di Euclide. Il volume raffigurato nel dipinto è l'edizione di Ratdolt del 1482 ed è aperto sulle due pagine che contengono le proposizioni 8 e 9 del XIII libro.

Che si tratti dell'edizione del 1482 lo si può immediatamente verificare dal confronto delle figure. Sia nell'edizione successiva di Zamberti del 1505 che in quella curata dallo stesso Pacioli nel 1509 la disposizione di testo e figure infatti cambia rispetto all'edizione di Ratdolt. Confrontando il testo a stampa con quello dipinto nel *Doppio ritratto* possiamo rilevare tuttavia alcune differenze: nel dipinto compaiono annotazioni scritte a mano con inchiostro rosso e l'integrazione del disegno di 7 segmenti in fondo alla pagina a destra di frate Luca. Si tratta probabilmente della copia personale di Pacioli.

Con l'indice della mano sinistra il matematico segue l'enunciato della proposizione VIII: "Omnis trianguli equilateri quod a latere suo quadratum describitur triplum est quadrato dimidi diametri circuli a quo triangulis ipse circumscribit". Con la mano destra, invece disegna la figura relativa alla dimostrazione della proposizione che definisce la proporzione fra il quadrato del lato del triangolo inscritto in un cerchio e il raggio (usando le lettere della figura del 1482: $ac^2=3ad^2$). Se, però, si osserva attentamente la lavagna nella quale Pacioli sta scrivendo, si può notare come la figura che sta tracciando il frate sia diversa da quella presente nel testo di Euclide.

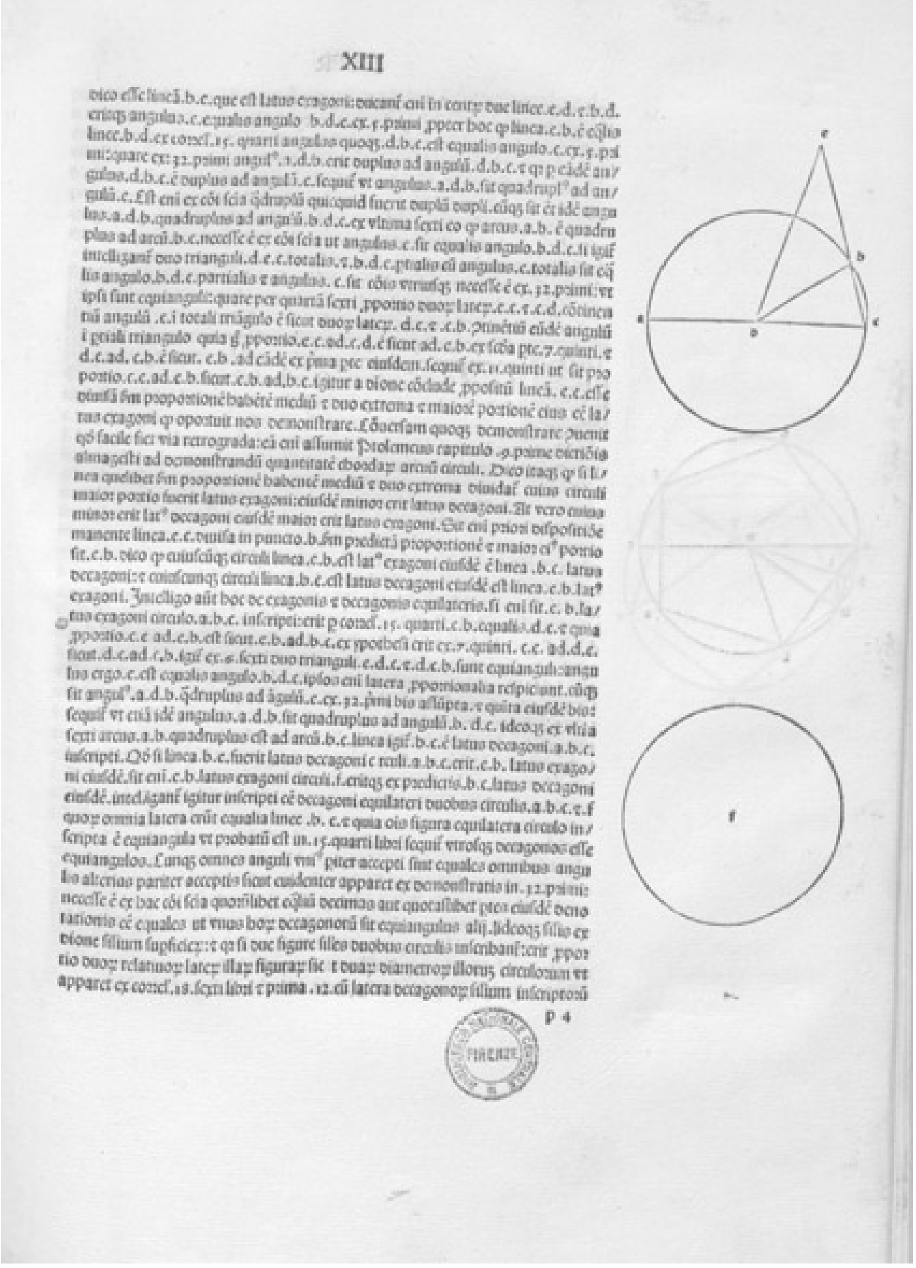


Fig. 4 - Euclides, *Elementa geometriae*, a cura di Ratdolt, Venezia, 1482.

Sebbene, infatti, il bordo della lavagna rechi scritto a lettere capitali in stile epigrafico antico il nome di EUCLIDES, Luca dal Borgo qui sembra partire dal testo del matematico alessandrino per risolvere un altro problema: la linea che la mano di Pacioli si accinge a disegnare, infatti, si interrompe a metà ed è comunque estranea alla figura presente negli *Elementi* di Euclide . È come se Luca dal Borgo, con gli occhi fissi al rombicubottaedro, volesse sfidare lo spettatore a risolvere l'enigma matematico che si cela nella figura e nei numeri scritti sulla lavagnetta .

A prescindere dalla soluzione del rompicapo geometrico che il *Doppio ritratto* sembra proporre allo spettatore, il messaggio culturale implicito nell'opera consiste nel rinascimento della matematica euclidea e nella sua applicazione alle arti dei "pratici vulgari". Risulta emblematico a questo proposito l'accostamento sullo stesso tavolo di lavoro degli *Elementi* di Euclide e della *Summa* di frate Luca, che rappresentano non soltanto l'antico e il moderno, ma anche l'astrazione teorica e l'applicazione pratica delle proporzioni; il rigore cristallino della dimostrazione e l'uso delle proporzioni nei mestieri e nelle tecniche.

Il ritratto di Luca Pacioli è uno dei rari dipinti dedicati ad un matematico e testimonia, oltre che la perizia pittorica del suo autore, anche la fama del frate di Sansepolcro alla fine del XV secolo. Le sue opere matematiche, anche grazie alla larga diffusione che ricevettero per mezzo della stampa, costituirono del resto il punto di riferimento di matematici, artisti e tecnici del Rinascimento. Il frate di Sansepolcro, infatti, oltre ad essere, insieme a Piero della Francesca, il più importante matematico italiano della seconda metà del XV secolo, fu uno dei pochi rappresentanti del mondo dei dotti che apprezzò e valorizzò la cultura dei tecnici, affrancandola dal disprezzo con il quale era stata generalmente considerata dal mondo delle università medioevali. Conteso come insegnante di matematica da Repubbliche, Signorie e Principati di tutta la penisola, Pacioli fu in contatto con i più importanti centri del Rinascimento italiano ed ebbe modo di conoscere i migliori pittori, scultori, ingegneri, architetti, artigiani, abachisti, esperti dell'arte della guerra, del secondo Quattrocento. Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Leon Battista Alberti, Albrecht Dürer, Franchino Gaffurio, Gian Giacomo Trivulzio, Antonello Sanseverino, Camillo Vitelli furono soltanto alcuni dei più celebri interlocutori del frate di Sansepolcro. Pacioli instaurò con essi uno stretto rapporto di collaborazione: i tecnici e gli artisti, infatti, nutrivano stima per il matematico francescano che insegnava loro la geometria di Euclide e l'algebra di Leonardo Pisano. Pacioli, da parte sua, considerava le discipline tecniche e artistiche come forme di conoscenza degne del massimo rispetto, sia per l'utilità pratica che da esse deriva, sia – diremmo oggi - per il loro status epistemologico, fondato sull'uso della matematica. Luca dal Borgo, che nel corso della sua vita fu un noto e celebre docente di matematica, ambìto dalle più illuminate corti e dalle migliori università italiane, dopo la sua morte ha avuto una fortuna alterna nel giudizio che ne hanno dato gli storici.

La fama del frate di Sansepolcro cominciò infatti ad essere intaccata, oltre che dalle critiche di Cardano e Tartaglia, soprattutto dalle accuse di plagio che gli mosse Giorgio Vasari, quando nelle sue *Vite* imputò a Luca Pacioli la colpa di aver copiato e pubblicato a suo nome i trattati matematici del pittore suo conterraneo Piero della Francesca. Dopo gli studi di Girolamo Mancini, che all'inizio del XX secolo dimostrarono la fondatezza delle accuse di Giorgio Vasari, la figura di frate Luca dal Borgo è stata dipinta alla luce delle fonti dirette che volta a volta venivano riconosciute nell'analisi delle sue opere. Gli storici della matematica si sono soffermati soprattutto ad esaminare singole parti dei libri a stampa di Pacioli con l'intento di dimostrarne la scarsa originalità. È stato così rilevato che gran parte dell'algebra contenuta nell'ottava distinzione della *Summa* non solo non contiene novità di rilievo rispetto alle soluzioni trovate dalla migliore tradizione abachistica, ma in taluni casi è una semplificazione delle tecniche di calcolo adoperate dai grandi maestri d'abaco del XV secolo. Per quanto riguarda la geometria, invece, gli studiosi si sono limitati a ricondurre l'opera di frate Luca alle sue fonti dirette: cioè al codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze e ai due trattati matematici di Piero della Francesca sui corpi regolari.

Gli storici della ragioneria, da parte loro, pur riconoscendo l'importanza dell'opera di frate Luca nella codificazione della partita doppia, hanno rintracciato l'origine del metodo di registrazione contabile descritto nella *Summa* nella pratica quotidiana dei mercanti e quindi hanno ridimensionato l'originalità dell'opera di Pacioli. Gli storici dell'arte, infine, hanno valutato i testi di Luca dal Borgo per lo più in funzione del rapporto con Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer, evidenziando soprattutto il ruolo dei tre artisti nella diffusione del genere dei poliedri regolari e nell'influenza sulle arti della cosmologia platonica ad essi connessa.

In molti casi l'immagine di Luca Pacioli disegnata dalla storiografia del XX secolo è stata distorta da una lente interpretativa che ha usato il solo criterio dell'originalità del prodotto culturale per analizzare e descrivere le sue opere. Frate Luca, del resto, nel compilare i suoi libri a stampa saccheggia in modo sistematico manoscritti d'abaco e trattati scritti da altri autori. Non per questo tuttavia l'importanza della sua opera per lo sviluppo delle discipline matematiche e per l'affermazione della civiltà del Rinascimento italiano ne risulta diminiuta. Pacioli, infatti, è fra i primi matematici ad intuire la portata dirompente e rivoluzionaria della nuova tecnica della stampa a caratteri mobili e la utilizza per la diffusione di un sapere matematico che altrimenti sarebbe restato confinato nelle botteghe d'abaco e affidato ad un numero limitatissimo di copie manoscritte.

I meriti di Luca Pacioli non vanno rintracciati soltanto nell'instancabile attività di divulgazione della geometria euclidea, che caratterizzò la sua vita girovaga, o nell'uso della stampa come veicolo di diffusione culturale, ma consistono anche nell'aver rinnovato profondamente l'immagine della matematica e averla posta al centro dello scibile umano. I libri di Luca dal Borgo rappresentarono un punto di riferimento per gli autori del Cinquecento, sia per i contenuti in essi esposti sia, soprattutto, per una nuova concezione della matematica e del mondo che si delineava nella *Summa* e nella *Divina proportione*. Dal punto di vista di una storia delle matematiche attenta quasi esclusivamente a individuare i contributi originali apportati da un autore allo sviluppo di queste discipline, i testi di Pacioli non forniscono risultati sensazionali. Sarebbe velleitario, del resto, pretendere originalità da opere che si configurano per lo più come enciclopedie matematiche, finalizzate a raccogliere in volumi a stampa le conoscenze sparse in una miriade di contributi affidati a codici manoscritti. Luca Pacioli ordina e organizza il materiale che recupera, fornendo talvolta la struttura teorica necessaria alla fondazione delle regole pratiche che espone. Questa operazione gli consente di ottenere un prodotto culturale di successo, dal quale attingeranno informazioni i matematici, gli artisti, i tecnici e i maestri d'abaco del XVI secolo.

Il valore culturale della sua opera non deve essere ridotto, pertanto, all'elenco di conoscenze "originali" contenute nelle sue opere e veicolate a mezzo stampa ai matematici del Cinquecento. L'originalità del pensiero di Pacioli consiste semmai nell'aver elevato la matematica a regina delle scienze e delle tecniche. La centralità delle matematiche per la conoscenza umana dipende - secondo Luca Pacioli – dalla necessità dell'impiego delle proporzioni in ogni ambito dello scibile umano. Le proporzioni, infatti, per il frate di Sansepolcro non sono soltanto il linguaggio universale delle scienze e delle tecniche, ma anche il criterio con il quale il Creatore ha plasmato il mondo. Queste idee attraverseranno il Cinquecento fino alla nascita della scienza galileiana e contribuiranno alla crescita del prestigio e del ruolo delle matematiche per l'intero scibile umano.

Il *Doppio ritratto* può essere letto come una metafora delle poliedriche facce di Luca Pacioli: il maestro d'abaco, quale emerge dal *Trattato d'abaco* scritto per gli allievi di Perugia (1478); il sostenitore instancabile dell'universalità delle matematiche e il promotore dell'incontro fra la matematica dotta e la matematica pratica; l'artefice di una enciclopedica *Summa* delle discipline matematiche medioevali e rinascimentali; il codificatore della registrazione contabile a partita doppia nel *Tractatus XI* della nona distinzione della *Summa*; il divulgatore di Euclide e cultore della geometria e della metafisica dei poliedri regolari, come appare nella *Divina proportione*; il maestro di geometria di Leonardo; il teorico dell'architettura vitruviana, quale è nel *Trattato di architettura* pubblicato nell'edizione a stampa della *Divina proportione* del 1509; l'editore degli *Elementi* di Euclide (1509); il giocatore e trattatista del *De ludo schachorum*; il compilatore di giochi matematici del *De viribus quantitatis*; l'ideatore dell'alfabeto costruito con riga e compasso e l'infaticabile collaboratore del suo tipografo, come emerge dalle caratteristiche editoriali della *Summa* e della *Divina proportione*.

Il collante culturale che tiene insieme le molteplici e variegate attività di frate Luca è costituito dalla profonda convinzione dell'universale applicabilità delle matematiche. "Se tu ben discorri – rileva infatti Pacioli - in tutte le arti tu troverai la proportione de tutte esser madre e regina e senza lei niuna poterse exercitare". L'interesse di frate Luca per l'uso delle proporzioni in ogni ambito dello scibile umano è rintracciabile in tutte le sue opere e consente allo storico, come all'autore del suo ritratto, di assemblare le poliedriche facce di Pacioli in un'unica figura.

Fig. 5 – Mappa di Borgo San Sepolcro nel XV secolo

Strade, Porte, Edifici, Piazze e Chiese

A. Via Maestra
B. Via delle Giunte
C. Via San Niccolò
D. Via dei Cipolli
E. Via Abbarbagliati
F. Via Sant'Antonio
G. Via San Giovanni Battista (Via del Rio)
H. Via del Buon Umore
I. Via Borgo Nuovo
J. Cantone dei Graziani (Graziani Crossing)
K. Via Agio Vecchio
L. Via Agio Torto (Via Rossi Domina Maria)
M. Via dei Servi
N. Via della Fraternita (Via del Ghiacciari)
O. Via Marcelli
P. Via della Fonte
Q. Via Santa Caterina
R. Via Castelnouvo (Via della Castellana)
S. Via Firenzuola
T. Via Pettorotondo
U. Via San Gregorio
V. Via della Stufa
X. Via del Panico

a. Porta Fiorentina
b. Porta del Castello
c. Porta Libera
d. Porta Romana
(Porta San Niccolò)
e. Porta del Ponte
f. Torre di Berta
g. Casa di Piero
h. Della Francesca Workshop
i. Residenza del Capitano
j. Residenza dei Conservatori
k. Palazzo delle Laudi
m. Palazzo Graziani (two)
n. Palazzo Pichi (two)
q. Piazza Comunale
r. Piazza Santa Croce
t. Piazza Dotti
w. Piazza San Francesco

1. Badia di San Giovanni Evangelista
2. Chiesa di Sant'Antonio
3. Chiesa di San Giovanni Battista (San Giovanni d'Afra)
4. Chiesa di San Francesco
5. Chiesa di San Niccolò
6. Chiesa della Pieve di Santa Maria
7. Chiesa di Sant'Agostino
8. Chiesa di Santa Maria dei Servi
9. Chiesa di Santa Maria della Misericordia

I luoghi di Pacioli:

D. Via dei Cipolli. In questa via c'era la casa natale di Luca Pacioli
4. Chiesa e Convento di San Francesco. Qui risiedeva Pacioli nei suoi soggiorni a Sansepolcro.

Cronologia

- 1446-1448: Luca Pacioli nasce a Borgo San Sepolcro. Se il documento contenuto nel *Necrologium* di Santa Croce a Firenze, che riporta la data della morte di Pacioli (19 giugno 1517), ha una qualche attendibilità storica possiamo fissare come probabile anno di nascita di Pacioli il 1447.
- 1459: muore il padre di Luca, Bartolomeo Pacioli. Il ragazzo viene accolto dalla famiglia di Messer Folco de' Bofolci del Borgo
- 1464 ca.-1470: prima permanenza a Venezia presso la famiglia Rompiasi e formazione matematica presso la Scuola di Rialto agli insegnamenti di Domenico Bragadin
- 1466: il 23 aprile Luca è presente a Ferrara durante la festa di San Giorgio
- 1470: primo trattato d'abaco scritto per i Rompiasi (finora perduto). Pacioli poi è a Roma, ospite di Leon Battista Alberti
- 1471: il 26 febbraio è a Sansepolcro e già è frate francescano
- 1477-1480: primo incarico presso l'ateneo perugino per l'insegnamento di matematica abachistica;
- 12 dicembre 1477- 29 aprile 1478: stesura del *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos* (codice Vat. Lat. 3129 della Biblioteca Apostolica Vaticana)
- 1481: viaggio a Zara e stesura di un trattato d'abbaco "de' chasi più sutili e forti".
- 1481-1484: frate Luca diventa professore di teologia
- 1485-87: Fra il maggio del 1485 e il maggio del 1487 si colloca un soggiorno di Pacioli a Firenze. È già in corso la stesura della *Summa.*
- 1487-88. Nel periodo fra il maggio del 1487 e aprile del 1488 si svolge il secondo incarico di maestro Luca presso l'ateneo di Perugia.
- 1488-1489. Ricopre un incarico come pubblico lettore di matematica a Roma.
- 1489-90. Probabile periodo dell'insegnamento di Pacioli a Napoli.
- 1491-1493: Pacioli è a Sansepolcro. Gli atti notarili degli anni 1491-93 precedono alcuni viaggi a Padova, Assisi e forse a Urbino
- 1494: Pacioli è a Venezia per la pubblicazione della *Summa.* La stampa si conclude il 10 novembre 1494
- 1496-99. Pacioli è a Milano "ali stipendi" di Ludovico il Moro. Inizia la collaborazione con Leonardo da Vinci che si protrarrà con qualche

interruzione fino al 1506.

- 1499-1500. Diversi documenti attestano la presenza di frate Luca a Sansepolcro.
- 1500 (novembre) -1506 (ottobre). Pacioli insegna matematica presso lo studio fiorentino. Nello stesso tempo riceve una nomina per la lettura di matematica presso l'università di Bologna (1501-1502). Diversi documenti del 1503 e del 1506 attestano la presenza di Pacioli a Sansepolcro.
- 1506 (dicembre)-1508 (agosto): rimane un periodo oscuro della vita di Luca Pacioli, del quale non possediamo per ora documenti.
- 1508-1509. L'11 agosto 1508 nella Chiesa di San Bartolomeo di Rialto, a Venezia, Luca Pacioli legge una prolusione al V libro degli *Elementi.* La permanenza nella città lagunare si protrae al 1509 anno di edizione della *Divina proportione* e degli *Elementi* di Euclide curati dal frate di Sansepolcro. 9 novembre 1508: primo testamento di Pacioli
- 1509 (dicembre)- 1510 (ottobre): Diversi documenti testimoniano la presenza di Pacioli a Sansepolcro. 2 febbraio 1510: secondo testamento di Pacioli
- 1510-1511. Terzo incarico di Pacioli a Perugia per l'insegnamento di matematica all'università.
- 1511-1513. Alcuni documenti notarili attestano la presenza di frate Luca a Sansepolcro. Controversie con i confratelli francescani per i privilegi concessi a frate Luca dalla bolla papale del 4 maggio 1508 firmata dal papa Giulio II. 21 novembre 1511: terzo testamento di Pacioli.
- 1514-1515. Pacioli viene chiamato ad insegnare matematica a Roma.
- 1517. Il 15 aprile l'anziano frate era ancora in vita. Il 6 luglio era morto.

Indicazioni bibliografiche

Baldasso R. (2010): *The Portrait of Luca Pacioli and Disciple: a new mathematical look,* in "Art Bulletin" March-June 2010, Vol. XCII, n°. 1-2, pp. 83-102

Banker, J. R. (2009): *Luca Pacioli e Piero della Francesca,* in Enrico Giusti e Matteo Martelli (a cura di): *Pacioli 500 anni dopo,* Atti del Convegno di Studi, Sansepolcro 22/23 maggio 2009, Selci-Lama, Tipografia L'Artistica.

Benesch, O. (1954): *A New Contribution to the Problem of the Portrait of Luca Pacioli*, in "Gazette des Beaux-Arts".

Ciardi Dupré Dal Poggetto, Maria Grazia (1992): *Il ritratto di Luca Pacioli e di Guidubaldo da Montefeltro,* in *Piero e Urbino. Piero e le corti rinascimentali.* Catalogo della mostra, a cura di P. Dal Poggetto, Venezia: Marsilio.

Ciocci A., *Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento,* Bari, Cacucci, 2003

Ciocci A., *Luca Pacioli tra Piero della Francesca e Leonardo,* Sansepolcro, Aboca, 2009.

Dal Poggetto, Paolo, a cura di (1992): *Piero e Urbino. Piero e le corti rinascimentali.* Catalogo della mostra, Venezia: Marsilio.

Dalai Emiliani, M. (1983): *Ritratto di Luca Pacioli e Guidubaldo da Montefeltro*, in *Leonardo e il leonardismo a Napoli e a Roma Leonardo e il leonardismo a Napoli e a Roma. Catalogo* a cura di Alessandro Vezzosi con la collaborazione di Rosanna Barbiellini … [et al.], [Firenze]: Giunti-Barbèra

Dalai Emiliani, M. (1984): *Figure rinascimentali dei poliedri platonici. Qualche problema di storia e autografia*, in Pietro C. Marani (a cura di), *Fra Rinascimento, Manierismo e Realtà.* Scritti in memoria di Anna Maria Brizio, Firenze: Giunti-Barberà.

Daly Davis, Margaret (1977): *Piero della Francesca's Mathematical Treatises: the "Trattato d'abaco" and "Libellus de quinque corporibus regularibus"*, Ravenna, Longo.

Giusti, Enrico e Matteo Martelli (a cura di) (2009): *Pacioli 500 anni dopo,* Atti del Convegno di Studi. Sansepolcro 22/23 maggio 2009, Selci-Lama, Tipografia L'Artistica.

Ferrari, S. (2006): *Jacopo de' Barbari. Un protagonista del Rinascimento tra Venezia e Dürer,* Milano, Bruno Mondadori.

Field, J.V. (1997): *Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro,* *and Johannes Kepler*, in "Archive for History of Exact Sciences", Volume 50, n. 3-4.

Gamba, E. (2010): *Proviamo a rileggere il "Doppio ritratto" di Luca Pacioli",* in F.M. Cesaroni, M. Ciambotti, E. Gamba, V. Montebelli, *Le tre facce del poliedrico Luca Pacioli,* Quaderni del Centro Internazionale di Studi Urbino e la Prospettiva, Urbino, Age.

Gamba, E. (2016): *Qualche novità sul Doppio ritratto*, in M. Martelli (a cura di), *Luca Pacioli e i grandi artisti del Rinascimento italiano,* Biblioteca del Centro Studi "Mario Pancrazi", Umbertide, UB.

Hernández-Esteve, Esteban e Matteo Martelli (a cura di) (2011): *Before and after Luca Pacioli.* Atti II Incontro Internazionale, 17/18/19 Giugno 2011, Sansepolcro - Perugia - Firenze, Centro Studi "Mario Pancrazi" - AECA. Acounting History Commission - Società Italiana di Storia della Ragioneria.

Mancini, Girolamo (1915): *L'opera "De corporibus regularibus" di Piero Franceschi detto Della Francesca, usurpata da fra Luca Pacioli*, in "Atti della Reale Accademia dei Lincei. Memoria della classe di Scienze"

Nenci, E. (1998): *Le vite de' matematici di Bernardino Baldi (1553-1617).* Edizione annotata e commentata della parte medievale e rinascimentale, Milano, Angeli.

Fig. 6 – Via dei Cipolli (Sansepolcro). Targa a ricordo dell'abitazione in cui è nato Luca

Parte prima
La vita di Luca Pacioli
Peregrinando per diversi paesi

1 - La formazione abachistica e il primo soggiorno veneziano

Luca Pacioli nacque a Borgo Sansepolcro tra l'ottobre del 1446 e l'ottobre del 1448 da una famiglia di modeste condizioni economiche che abitava in una casa situata in Via dei Cipolli. Il padre Bartolomeo morì nel 1459 e lasciò orfani Luca e i suoi due fratelli Ginepro e Ambrogio. Dal testamento del 1508 sappiamo che dopo la morte del padre fu allevato dalla famiglia di Conte dei Befolci "la quale- ricorda Pacioli – in pueritia me nutrì e alevò", e probabilmente frequentò la scuola di grammatica e latino, il cosiddetto "Donato e Catone", che era attiva in via della Fraternita e contava tra i maestri quel Matteo di ser Paolo, menzionato ed elogiato nella *Summa* come "el famoso Oratore, poeta, e rethorico, greco e latino" che tradusse il *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca in latino, "de verbo ad verbum, con exquisiti vocabuli" (*Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, Venezia, 1494, c. 68 v). I suoi due fratelli, Ambrogio e Ginepro entrarono subito nell'ordine francescano e già nel 1466 quando, insieme a Luca, vendettero la casa di via dei Cipolli, figurano nell'atto notarile come frati minori del Convento di Sansepolcro. Nel corso del suo apprendistato presso i Befolci il giovane Luca dovette mostrare abilità nel mestiere del mercante e, forse per via delle sue conoscenze di matematica pratica, e grazie ai rapporti commerciali di alcuni mercanti di Sansepolcro con Venezia, nella compravendita della tintura del guado, si recò nella Repubblica dei dogi e divenne precettore dei figli di Antonio Rompiasi.

In un passo autobiografico della *Summa* (c. 67v) Pacioli così racconta la sua formazione e i suoi studi di algebra:

> "Per l'operare de l'arte magiore, ditta dal vulgo la regola de la cosa over algebra e almucabala servaremo noi in questo le qui da lato abreviature over caratteri, sì commo ancora nelli altri nostri quattro volumi de simili discipline per noi compilati havemo usati: cioè in quello che a li gioveni de Peroscia in titulai nel 1476, nel quale non con tanta copiosità se trattò. E

> anche in quello che a Zara nel 1481 de casi più sutili e forti componemmo. E anche in quello che nel 1470 dedicammo a li nostri relevati discipuli ser Bartolomeo e Francesco e Paulo, fratelli de' Rompiasi da la Zudecca, degni mercatanti in Vinegia, figliuoli già de Ser Antonio. Sotto la cui ombra paterna e fraterna in lor propria casa me relevai. E a simili scientie sotto la disciplina de meser Domenico Bragadino lì in Vinegia da la excelsa Signoria lectore de ogni scientia publico deputato. Qual fo immediate successore al perspicacissimo Reverendo doctore, e di San Marco canonico maestro, Paulo da la Pergola suo preceptore. E ora a lui, al presente el Magnifico et eximio doctore meser Antonio Cornaro, nostro condiscipulo sotto la doctrina del ditto Bragadino. E questo quando eravamo al secolo. Ma da poi che l'abito indegnamente del seraphyco San Francesco ex voto pigliammo, per diversi paesi c'è convenuto andare peregrinando. E al presente qui in Peroscia per pubblico emolumento a satisfation communa, a simili facultà ci retroviamo. E sempre per ordine de li nostri Reverendi prelati, maxime del reverendissimo padre nostro generale, presente maestro, Francesco Sansone da Brescia, correndo gli anni de nostro Signore Jesu Christo 1487, l'anno IV del pontificato del sanctissimo in Christo papa Innocenzo octavo".

Nella prima fase della sua carriera di docente Pacioli fu prevalentemente impegnato ad insegnare la matematica commerciale, che durante il Rinascimento consisteva in un corso speciale di abaco ad uso dei mercanti. A partire dal XIII secolo le compagnie mercantili e bancarie italiane trasformarono il commercio internazionale, adoperando procedure e tecniche d'affari che richiedevano la conoscenza di metodi matematici utili a risolvere i problemi connessi ai cambi, al calcolo dell'interesse sui prestiti, alla registrazione dei conti, e alla contabilità. Dal *Liber Abaci* (1202) di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, si era sviluppata una secolare tradizione di scuole d'abaco, fiorenti soprattutto nelle città dove maggiormente si sentiva il bisogno di insegnare matematica commerciale. Venezia, la cui politica era ispirata all'incremento commerciale e finanziario dell'economia della repubblica oligarchica, era la città nella quale l'esigenza di un'educazione commerciale specializzata si avvertiva maggiormente. I traffici con il nord Europa e con il Medio Oriente richiedevano, infatti, una specifica preparazione concernente i cambi, le tariffe, il calcolo degli interessi, la contabilità.

I manuali d'abaco solitamente contenevano un numero elevato di esempi di soluzione di alcune tipologie di problemi pratici che dovevano costituire una specie di paradigma, o esempio da seguire, per affrontare questioni analoghe che potevano presentarsi nella pratica commerciale.

Anche quando veniva fornita un'infarinatura teorica sui metodi di calcolo della superficie di circonferenze o di aree e volumi, questa era soltanto il preludio all'applicazione delle regole nella misura del volume delle botti, dell'altezza delle torri ecc. Di questo tipo erano gli insegnamenti del Pacioli ai suoi tre giovani allievi, e innumerevoli esempi di tal sorta possono essere citati traendo spunto sia dal *Tractatus ad discipulos perusinos*, del 1478, sia dalla stessa *Summa.*

Sebbene esistessero scuole pubbliche d'abaco sia a Venezia che a Firenze, la maggior parte degli insegnanti di matematica commerciale gestiva scuole private. L'educazione commerciale peraltro era esclusa dal curriculum delle scuole latine e umanistiche, dove il programma terminava con lo studio di Cicerone e Quintiliano per la retorica, Orazio, Terenzio e Ovidio per la poesia, Cesare e Sallustio per la storia. La matematica tradizionale insegnata all'università veniva trattata soprattutto al livello di ricerca astratta e molto spesso era intrisa di numerologia; non poteva quindi essere adatta agli scopi prefissati dai mercanti.

Il passo della *Summa* di carta 67v attesta che il primo manuale di matematica scritto da Pacioli per i figli del mercante veneziano Antonio Rompiasi risale al 1470. A questa data Luca dal Borgo doveva avere circa ventitré anni ed era arrivato a Venezia già nel 1464. Nel testamento del 1508 infatti Pacioli dichiara di insegnare matematica da 44 anni, cioè dal 1464. Sappiamo, però, che nel 1466 lasciò per un breve periodo la città lagunare poiché nell'aprile del 1466 era a Ferrara e nell'ottobre dello stesso anno a Sansepolcro, a stipulare il contratto di vendita della casa paterna di Via dei Cipolli, insieme ai suoi fratelli.

Dal 1466 al 1470 Luca tornò a Venezia, presso i Rompiasi, "sotto la cui ombra paterna e fraterna in lor propria casa me relevai", ad insegnare ai tre figli di Antonio i fondamenti della matematica abachistica. Quello di Pacioli tuttavia era un insegnamento che non si limitava semplicemente all'abaco tradizionalmente inteso, ma probabilmente abbracciava anche la teoria delle proporzioni geometriche fino a trattare i libri più impegnativi degli *Elementi* di Euclide. Non a caso insieme ai Rompiasi Pacioli andava a seguire i corsi di Domenico Bragadin, docente di matematica alla scuola di Rialto, e successore del famoso Paolo della Pergola .

La scuola di Rialto, fondata grazie al lascito testamentario di Simone Valentini nel 1408, sotto la guida di Paolo della Pergola (dal 1420 al 1454) conobbe un grande sviluppo; tanto che alla Logica e alla Filosofia, insegnate fin dall'apertura della scuola, si aggiunsero la Teologia, la Filosofia naturale e soprattutto la Matematica. Dal 1446 a Venezia entrarono in funzione anche le due scuole di San Marco, anche esse come quella di Rialto preparatorie agli studi universitari di Padova, ma con taglio umanistico anziché scientifico. Alla scuola di Rialto Pacioli affinò le sue già buone conoscenze matematiche ed ebbe modo di frequentare Antonio Corner, il futuro successore alla cattedra di matematica di Domenico Bragadin. Tutto lascia pensare che le amicizie di Pacioli e la stessa residenza alla Giudecca, culla dei mercanti ricchi di Venezia, introducessero il giovane precettore nel mondo dell'oligarchia della Serenissima a contatto con le famiglie Corner, Barbaro, Mocenigo, Vendramin, e con gli esponenti dell'élite veneziana che Pacioli stesso non manca di elencare puntigliosamente nel discorso d'apertura del corso di lezioni che dopo diversi decenni terrà alla scuola di Rialto a partire dall'agosto del 1508.

La prima permanenza di Pacioli a Venezia risulta importante per almeno due ragioni: 1) nella città lagunare il giovane insegnante impara il sistema di tenere i conti alla maniera veneziana, cioè la partita doppia, successivamente codificata nel *Tractatus undecimus* della nona distinzione della *Summa*, dal titolo *De computis et scripturis*; 2) entra a conoscenza della pittura dei Bellini «quali sempre con libella e circino lor opere proportionando a perfection mirabile ducano, in modo che non humane, ma divine negli ochi nostri s'apresentano».

2 - Il soggiorno a Roma (1470-1471) e l'abito di San Francesco

Nel 1470-1471 Pacioli è a Roma, ospitato da Leon Battista Alberti. È lo stesso Pacioli a fornire tale informazione nel *Trattato de l'architectura*, seconda parte della *Divina proportione*, pubblicata a Venezia nel 1509 (L. Pacioli*, De Divina Proportione,* Venezia, Paganini, 1509, c. 29v):

> "Non so pensare carissimi miei perché el nostro compatriota Leon Batista de li Alberti fiorentino, con lo quale più e più mesi ne l'alma Roma, al tempo del pontefice Paulo Barbo de Vinegia, in proprio domicilio con lui a sue spese sempre ben trattato, omo certamente de grandissima perspicacità e dottrina in umanità e retorica, comme apare pel suo alto dire ne la sua opera de architettura, in la quale tanto amplamente parlandone non abia osservato in essa el morale documento, qual rende licito a cadauno dovere per la patria combattere, e lui non che de fatti ma de qualche parolla in ditta opera commendarla: anzi più presto l'onore che da altri li fia atribuito

lì l' ha in gran parte spento in questa architettonica facultà".

Poiché Paolo Barbo fu papa dal 1464 al 1471 si desume che la permanenza di Luca Pacioli a Roma, presso la dimora di Leon Battista Alberti risalga al 1470-1471. L'influenza del pensiero dell'Alberti è rintracciabile in più luoghi dell'opera pacioliana. La trattazione delle proporzioni del corpo umano contenuta nel *De statua* albertiano ispira, insieme al *De architectura* di Vitruvio, la sezione del trattato scritto dal matematico, dedicata al proporzionamento degli edifici sulla base delle misure tratte dal corpo umano. Ma è anche il pensiero filosofico dell'Alberti che interessa a Pacioli. Non a caso questi presenta l'architetto come «omo de grandissima perspicacità in umanità e retorica», alludendo in questa maniera ad un aspetto dell'Alberti, letterato e autore tra le altre opere del *Momus,* degli *Intercenali*, del *Teogenio*, e di un cospicuo numero di scritti in volgare e latino, dai quali traspare un'immagine dell'umanista piuttosto distante da quella oleograficamente dipinta da Landino. È questo personaggio ormai anziano e vicino alla morte che conosce Pacioli nel soggiorno romano del 1470-71.

Dai colloqui col vecchio architetto e pensatore il giovane matematico trae soprattutto la concezione della natura, retta da immutabili leggi matematiche nelle quali si rispecchia l'ordine divino e la bellezza del creato: concezione, presente anche nella filosofia di Cusano, e più volte ribadita nelle opere albertiane (soprattutto nel *De re aedificatoria*). La bellezza della natura viene analizzata da Alberti in chiave euclidea. Sono le proporzioni a costituire il fondamento ontologico ed estetico della natura. Gli artisti sono quei pensatori, quegli studiosi, ai quali è demandato il compito non solo di imitare la natura ma di migliorarne la bellezza, tramite lo studio delle proporzioni matematiche che presiedono ai fenomeni naturali.

La conoscenza dell'Alberti, oltre a schiudere le porte intellettuali dell'affascinante intreccio tra arte e scienza che uomini come Piero della Francesca stavano realizzando nelle loro opere, permise a Pacioli di entrare nell'ambiente aristocratico e umanista della Roma papalina di Paolo II. La città eterna stava assistendo al processo di *renovatio urbis*, iniziato già sotto il pontificato di Eugenio IV (1431-1447) e proseguito con Niccolò V (1447-1455). Alla rinascita di Roma aveva contribuito fin dagli anni '40 anche Leon Battista Alberti, autore di un'opera cartografica, la *Descritpio Urbis*, in cui proponeva una rappresentazione della città basata su rilievi sistematici e scientifici.

Al tempo di Paolo II, dopo i pontificati di Callisto III (1455-58) e Pio II (1458-1464), Roma presentava caratteristiche economiche, sociali e culturali nettamente diverse da Venezia. Al mondo affaristico e intraprendente della Serenissima si opponeva infatti un'aristocrazia sostanzialmente parassitaria, gravitante intorno alla curia pontificia. Il progressivo indebolimento politico del Collegio cardinalizio nei confornti del Papa procedeva di pari passo però con il rafforzamento socio-economico del cardinalato e con la conseguente formazione di corti cardinalizie sempre più ricche, numerose e aperte agli umanisti.

La vita culturale e lo sviluppo dell'umanesimo, pertanto, erano più vivaci che a Venezia. Dopo il pontificato di Niccolò V e la creazione della biblioteca Vaticana, fu il papa umanista Pio II ad incrementare gli *studia humanitatis*, le arti figurative e l'architettura. Pomponio Leto, fondatore dell'Accademia Romana, Flavio Biondo, storico dal gusto antiquario, autore di opere come *Roma instaurata* e *Roma triumphans*, e Platina, illustre esponente dell'Accademia pomponiana, sono soltanto i nomi di spicco dell'umanesimo romano; ma fu proprio contro gli «accademici», accusati di sobillare gli animi all'eresia e all'ateismo, e rei di mettere in discussione con gli strumenti filologici approntati da Lorenzo Valla la veridicità della donazione di Costantino, che si scagliò Paolo II per reprimere una supposta congiura contro il suo pontificato nel 1468. Barbo abolì anche tutte quelle istituzioni di corte promosse dai papi precedenti per incrementare gli studi umanistici e fra queste anche quella di abbreviatore apostolico ricoperta dall'Alberti.

Fig. 7 - Gli *Elementi* di Euclide con una veduta di Roma, realizzata con metodo albertiano. Vat. Lat. 2224 fol. 98r.

Ciò nondimeno l'influenza a corte del grande architetto fiorentino era notevole e Pacioli poté giovarsene nella conoscenza di Pietro e Girolamo

Riario, nel cui palazzo (oggi palazzo Altemps) sarà ospitato in occasione della sua visita a Roma del 1489 .

Dopo la morte dell'Alberti, Luca dal Borgo, probabilmente in seguito ad un voto (ex voto), già nel 1471 era entrato nell'ordine dei frati minori di San Francesco: ed aveva dato inizio al suo frenetico peregrinare per "diversi paesi".

> "Ma da poi che l'abito indegnamente del seraphico San Francesco ex voto pigliammo - ricorda Pacioli - per diversi paesi c'è convenuto andare peregrinando" .

3 - Frate Luca Magister theologiae: Perugia e Firenze.

Come prima tappa della sua incessante peregrinazione frate Luca andò ad insegnare nell'Università di Perugia. Così scrive Pacioli nella *Summa* (dist. VI, tr. VI, art. 169):

> "Per la qual cosa se così non paresse ad altri, prego che con sua dolci lima el mio dire correga, e compassione habia a chi altri affanni sente, si commo a me el peso cotidiano de lo leger e insegnare, qui in questa alma e augusta cità de Peroscia; dove a loro communa satisfatione partendomi del fior del mondo, cioè Fiorenza, harivai. E tal peso presi, per la perpetua obligatione o con tutti di questa cità nel 1487 a dì primo magio. E prima nel 1475 ancor per anni 3 me condussero con diligentia li servici, qual Idio sempre in sanità e paci conservi nobis quoqunque in hoc seculo et in futuro gloriam cum sanctis omnibus sempiterna concedere dignetur".

Da questo passo risulta che Pacioli soggiorna a Perugia dal 1475 al 1478. I volumi dei Consigli e Riformanze dell'Archivio Storico di Perugia tuttavia registrano la presenza del frate allo studio perugino soltanto a partire dal 1477. L'incarico viene retribuito al Pacioli con trenta fiorini annui per il periodo iniziale. Successivamente, in seguito alle richieste di aumento dello stesso frate Luca, lo stipendio gli viene accresciuto di altri venti fiorini annui. L'ultimo pagamento risale al giugno del 1480. Se si considera poi che il proemio del *Tractatus ad discipulos perusinos* (Codice Vaticano Urbinate 3129) fornisce sia la data della conclusione (29 aprile 1478) sia quella di inizio della stesura (12 dicembre 1477, la vigilia di Santa Lucia) si può anche ipotizzare che il 1475 contenuto nel passo della *Summa* sia un errore di stampa.

Gli interessi matematici del frate in questo periodo sono legati prevalentemente all'istruzione dei mercanti; e proprio per questa ragione i magistrati perugini rinnovano il contratto a Pacioli fino alla fine del 1480. L'anno successivo Pacioli è insegnante a Zara, dove compone un trattato matematico comprendente «casi più sutili e forti» di quelli esaminati a Perugia. Per quanto breve, l'esperienza didattica nella città dalmata, allora sotto il controllo di Venezia, deve essere stata sufficiente per la redazione del trattato del 1481, finora perduto.

Tra l'estate del 1480 e l'estate del 1484 frate Luca conseguì il titolo di professore di teologia, come risulta da alcuni rogiti del Pichi di Sansepolcro, risalenti al 1484-85 in cui si parla di Pacioli come "magister sacre pagine professor". Con lo stesso titolo viene menzionato negli annali decemvirali di Perugia del 1486, dove compare in qualità di *Magister* e viene riassunto a ricoprire il vecchio incarico "ad docendum abicum et arismetricam" fino all'anno 1488. Dal brano della *Summa* che abbiamo citato sopra ("qui in questa alma e augusta cità de Peroscia, dove… partendomi dal fior del mondo, cioè Fiorenza, harivai. E tal peso presi, per la perpetua obligatione o con tutti di questa cità nel 1487 a dì primo magio") si evince che prima del nuovo incarico a Perugia il frate era stato a Firenze.

Nel "fiore del mondo" il frate aveva soggiornato per diverso tempo consultando anche preziosi volumi della biblioteca di S. Marco, onde approfondire il suo studio sulle proporzioni, sia continue che discontinue. A tal proposito Pacioli nella sesta distinzione della *Summa* (c. 67r) intende «dare bona regula a ditta denominatione della proportione fra gli ultimi estremi» e ci racconta dei suoi studi matematici presso la biblioteca marciana dei domenicani:

> "La qual regola io la cavo dal speculativo auctore de perspectiva per nome ditto Vitellione; qual me ricordo haver lecto in la biblioteca de' frati de San Marco in Firenza, de l'ordine di San Domenico ditti della observantia. La qual libraria feci e ordinò el Magnifico homo Cosmo de Medici: in la quale de ciascuna facultà in greco e latino copiosissimamente feci mettere libri, boni e belli, e maxime in tutte le arti mathematiche assai vive, feci porre. Li quali in parte in quel luogo (per l'humanità de quelli padri) legendo trascorsi, secondo quel poco senso che Idio per sua gratia ci ha dato; sempre qualche utilità reportandone".

Nella preziosa biblioteca di S. Marco, voluta da Cosimo il Vecchio, il frate francescano trovò gran parte dei testi di matematica dai quali trarre materiale utile per la stesura della sua maggiore opera. Gli autori dai quali

Pacioli prese le informazioni più proficue sono, come egli stesso dichiara nella lettera dedicatoria a Guidubaldo da Montefeltro, Leonardo Pisano, il Campano - che aveva curato l'edizione latina degli *Elementi* di Euclide - , Giordano Nemorario e Biagio Pelacani da Parma. Oltre a questi *auctores* Pacioli poteva usufruire delle opere di prospettiva naturale, come quella di Witelo, citata dallo stesso frate Luca.

L'interesse di Pacioli a questa data si sposta dalla matematica commerciale alla geometria euclidea astratta, e all'applicazione della teoria delle proporzioni alla prospettiva dei pittori. Non a caso viene menzionato il libro *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca:

> "Se tu ben discorri in tutte l'arti: tu troverai la proportione de tutte esser madre e regina e senza lei niuna poterse exercitare. Questo el prova prospectiva in sue picture. Del qual documento, a ciò ben s'abino a disponere, el sublime pictore (ali dì nostri anchor vivente) maestro Piero de li Franceschi, nostro conterraneo del Borgo San Sepolcro, hane in questi dì composto un degno libro de ditta Prospectiva; nel quale altamente de la pictura parla, ponendo sempre al suo dir ancora el modo e la figura del fare. El quale tutto habiamo lecto e discorso; el quale lui fece vulgare, e poi el famoso Oratore, poeta e rethorico, greco e latino (suo assiduo consotio e similmente conterraneo) maestro Matteo lo reccò a lengua latina ornatissimamente, de verbo ad verbum, con exquisiti vocabuli. Nela quale opera de le 10 parole le 9 recercano la proportione. E così con instrumenti li insegna proportionare piani e figure: con quanta facilità mai si possa" (*Summa*, 68v).

Quando frate Luca scrisse questo brano della *Summa* (probabilmente intorno al 1487), "el sublime pictore" Piero della Francesca era ancora vivo ("ali dì nostri anchor vivente") e Pacioli già aveva letto e studiato una copia manoscritta del *De prospettiva pingendi.* Il frate del resto aveva ben presente la nuova maniera di dipingere che stava sviluppandosi in quel periodo nella penisola sulla scia delle opere di Piero della Francesca, Antonio Pollaiolo, i Bellini, Mantegna, Melozzo da Forlì, il Perugino, Botticelli, Ghirlandaio e Verrocchio. Il «monarca de li tempi nostri de la pictura maestro Piero di Franceschi» - come ama definirlo il frate nell'epistola a Guidubaldo da Montefeltro che apre la *Summa* - aveva inaugurato una maniera di dipingere, tramite la prospettiva, che richiedeva l'uso di «libella e circino» (squadra e compasso) nel proporzionare il disegno, e Pacioli aveva avuto modo di apprezzare il metodo matematico adoperato dai sopracitati artisti coi quali aveva avuto colloqui. Ebbene, il soggiorno fiorentino degli anni

Ottanta gli permise di incontrare Botticelli e Pollaiolo, impegnati nella chiesa d'Ognissanti, e gli artisti della bottega del Verrocchio. Nella lista di quelli che la storia giudicherà i migliori pittori del Rinascimento manca il nome di Leonardo da Vinci che, evidentemente, al tempo in cui Pacioli era a Firenze (dopo il 1482) era già partito per Milano, al servizio di Ludovico il Moro.

La Firenze medicea degli anni Ottanta pullulava, oltre che di mercanti e artigiani, di botteghe di artisti nelle quali l'insegnamento della prospettiva si accompagnava allo studio delle opere medioevali di ottica secondo i precetti contenuti nei *Commentarii* di Lorenzo Ghiberti e nelle opere di Leon Battista Alberti (*De pictura, De sculptura*). La situazione politica, dopo la congiura dei Pazzi del 1478, si era sostanzialmente stabilizzata sotto il segno di Lorenzo il Magnifico, le cui iniziative culturali avevano reso possibile presso la villa Careggi lo sviluppo dell'Accademia Platonica di Marsilio Ficino e Pico della Mirandola.

Dopo il soggiorno fiorentino Pacioli si decide a compilare una summa di tutto il sapere matematico, in quanto ritiene, insieme ai teorici urbinati, che le scienze matematiche, essendo «in primo grado certitudinis», costituiscano la base per tutti campi della conoscenza umana, dalla mercatura all'architettura, dalla prospettiva all'arte delle fortificazioni, dalla poesia - per via del ritmo dei versi - alla musica e alla giurisprudenza.

4 - La stesura della «Summa» e il secondo soggiorno romano (1489)

Negli anni perugini, dal 1487 al 1488, Pacioli comincia perciò a scrivere la *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita,* adoperando il materiale di matematica d'abaco già utilizzato nei precedenti trattati, l'algebra e l'aritmetica di Leonardo Pisano e la geometria Euclidea, tratta dai commenti del Campano, le opere di Giordano Nemorario, Biagio Pelacani da Parma, Prosdocimo Beldomandi, Alberto di Sassonia e il *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca per quello che concerne la costruzione dei poliedri regolari. Quanto a questi ultimi, l'interesse di Pacioli era particolarmente cresciuto. Al 1489 infatti risale l'episodio narrato da Pacioli nella seconda parte della *Summa*, nella Distinctio octava (*Summa*, seconda parte 68v):

> “Questi son quelli, Magnanimo Duca, di quali le forme materiali, con assai adornezze nelle proprie mani di V.D.S. [presentai], nel sublime palazzo del Reverendissimo cardinale nostro protectore Monsegnor de San Pietro in Vincula, quando quella venne a la visitatione del summo pontefice Innocentio octavo, ne gli anni de la salute nostra 1489, del mese di aprile, che già sono 5 anni elapsi. E insiemi con quelli vi furon molti altri da ditti regulari dependenti, quali fabricai per lo Reverendo monsegnor Pietro de Valetari de Genoa, dignissimo vescovo de Carpentras, al cui obsequio alora foi deputato in casa de la felicissima memoria del Reverendo Cardinale de Fois nel palazzo ursino in campo de fiore”.

Il monsignore di San Pietro in Vincoli, protettore di Pacioli è Giuliano della Rovere, nominato cardinale nel dicembre del 1471 dallo zio, papa Sisto IV, e probabilmente conosciuto da Pacioli già al tempo del suo primo soggiorno romano. Durante il 1489 Pacioli tiene un corso di lezioni a Roma, e a quel tempo risale l’episodio narrato dal frate al termine della *Divina proportione*. Qui si dice che «al tempo de la fabrica del palazzo dela bona memoria del conte Girolimo in Roma, in sua presenza confabulando, commo acade, discorrendo la fabrica, siandovi molti degni in sua comitiva de diverse facultà, fra gli altri a quel tempo nominato pittore Melozzo da Frullì», Pacioli e Melozzo, per dilettare il conte Gerolamo Riario proposero ad un lapicida di produrre un poliedro regolare che non fosse uno dei cinque del *Timeo*. Il lapicida rispose sicuro di poter provvedere a scolpirne uno in breve tempo, ma naturalmente incappò in una brutta figura, data l’impossibilità teorica di un sesto sferoide oltre i cinque descritti da Platone. Ebbene, il palazzo del Riario, marito di Caterina Sforza, era ancora in costruzione nel 1489, quando anche Melozzo contribuiva a portare a termine la maestosa opera iniziata nel 1480.

A Roma Pacioli incontra anche Pier Leone da Spoleto, un medico che aveva insegnato per diversi anni a Pisa e si era occupato di uno dei problemi più dibattuti nella storia della matematica antica e medioevale: la quadratura del circolo.

> “La qual – dice frate Luca – finora non s’è trovata, e esser porria che già fosse nato colui che ci habbia a dar modo aponto quadrarlo. La cui possibilità per niun Phylosopho se denega, unde Aristotele dici che scientia de quadratura circuli est scibilis et dabilis quisquis, non dum sit scita neque data. E sopra de questo molti se sonno affaticati tutti li mathematici; maxime Raymundo, havenga che nel 1489, nela cità de Roma dove publice legivamo, M° Pierleone da Spoleti, medico che lì stava in casa del Reverendissimo Cardinale de San Marco, a sua R.S. (me presente e

tutti a una mensa per sua humanità) mostrò un libro in 4° foglio de circa carte 150, impresso ultra montes, compilato per un certo vescovo de quelle parti, dove lui diciva haverlo studiato tutto. E che altro non trattava che de quadratura circuli con moltissime figure e diciva che la concludiva. La qual cosa non podi mai vedere el libro dapoi non ebbi in libertà. Or commo sia, stiamoci ancora un poco a patti vechi e modi usati finché el certo si trova" (*Summa*, seconda parte, c. 68r).

Di quale libro sulla quadratura del cerchio, "impresso ultra montes", e mostratogli da Pierleone da Spoleto a Roma nel 1489, sta parlando Luca dal Borgo? Con ogni probabilità si tratta del *De mathematicis complementis* di Cusano, scritto nel 1454 e stampato a Strasburgo nel 1488 . Tra le opere matematiche del cardinale di Cusa questa, contenuta nell'edizione strasburghese, rappresenta il punto di arrivo della speculazione sulla misura del cerchio abbozzata in altre occasioni dal filosofo della dotta ignoranza. È presumibile quindi che il libro "in 4° foglio de circa 150" carte al quale allude Pacioli sia proprio il *De mathematicis complementis,* di cui riferiva Pierleone da Spoleto alla corte romana del Reverendissimo Cardinale Marco Barbo.

5 - Luca Pacioli a Napoli

Alla fine degli anni '80 del XV secolo frate Luca è il docente di matematica più famoso in Italia. La sua presenza è richiesta in tutti i maggiori centri del Rinascimento italiano, e fra questi occorre annoverare anche la corte aragonese di Napoli. Nell'epistola dedicatoria della *Summa* Pacioli riferisce del suo soggiorno napoletano, intellettualmente fecondo per gli incontri con Camillo Vitelli, Pietro Vettori e Gian Giacomo Trivulzio, specialmente per l'approfondimento di questioni concernenti l'architettura militare :

"De la qual cosa più volte col nobil homo excellente armigero Camillo Vitelli de Castello sopra di questo conferendo apertamente trovato habiamo. Nel tempo che optimamente el suo perspicacissimo ingegno comprexe el sublime volume de Euclide per più mesi da me expostili e in nel degno gimnasio de Napoli legendo. El simile con lo Magnifico oratore de lo illustrissimo Dominio Fiorentino alhora Pietro Victori e con la S. de miser Giovan Giacomo Traulzi, de parte in parte scorrendo per li antichi volumi Quinto Curtio, Frontino, Vegetio, e gli altri che de re militari hano scritto e deto si tocava".

Le discussioni con Trivulzio e con Vitelli vertevano principalmente sulla matematica applicata all'architettura militare (costruzione di difese pubbliche, muri, torri, bastioni, casematte ecc.); una tematica questa di generale interesse per i tecnici militari e i condottieri del tempo che, sulla scia di Federico da Montefeltro, studiavano geometria al fine di progettare ordigni bellici e strutture murarie idonee all'offesa e alla difesa militare .

Un'ulteriore testimonianza del soggiorno di Pacioli a Napoli è contenuta nell'epistola che apre il *Trattato dell'architettura* dell'edizione a stampa del 1509 della *Divina proportione* dove il frate afferma di essersi intrattenuto in dotti conversari «con la illustre signoria di miser Giovan Giacom Traulzi; con lo degno oratore del dominio fiorentino alhora Pietro Vetori, con presenza del Pontano nel palazzo del conte de Sarno in Napoli; e non manco con lo magnifico e degno condottiero signore Camillo Vitelli de la Cità de Castello, legendoli io per tre anni el sublime volume del nostro Euclide».

Il ruolo di Pacioli quale divulgatore della geometria euclidea ai tecnici è storicamente importante. La comunione di interessi tra tecnici e scienziati, che costituirà una delle caratteristiche del Cinquecento e Seicento, poteva infatti realizzarsi soltanto se le due culture avessero superato i rispettivi steccati linguistici.

Mentre Pacioli dimora a Napoli, la città vive un periodo di stabilità politica assicurato dalla figura del re Ferrante che dopo la congiura dei baroni, capeggiata da Antonello Sanseverino (1485-1487) ha riportato l'ordine ed ha incrementato lo sviluppo delle arti. Oltre alla realizzazione della Porta Capuana infatti si assiste in questo periodo alla messa in opera del progetto della villa di Poggioreale, detta il Dogliuolo, ideata da Giuliano da Maiano, l'architetto fiorentino - peraltro conosciuto da Pacioli - inviato presso la corte aragonese dal Magnifico, in linea con una consolidata strategia di politica estera che prevedeva tra le altre mosse diplomatiche l'«esportazione» di artisti e uomini della cultura fiorentina negli altri stati della penisola.

Il soggiorno napoletano di Pacioli non è databile con certezza. É probabile però che l'incarico di insegnare matematica "nel degno gimnasio de Napoli" risalga al 1489-90. Pacioli stesso nel sopracitato passo della *Summa* riferisce di aver insegnato Euclide e discusso con Vettori e Trivulzio "per più mesi" e quindi per il tempo di un anno accademico.

6 - Dal Borgo ad Urbino

Nell'autunno del 1490 Pacioli ha già lasciato la città vesuviana. Lo ritroviamo infatti a Sansepolcro, dove fra il 1491 e il 1493 la sua presenza nella città natale è testimoniata da numerosi documenti d'archivio, fra i quali alcuni dell'Archivio Generale dei Minori francescani testimoniano di un'accesa controversia fra il Ministro generale dell'ordine francescano, Francesco Sansone da Brescia, e il matematico di Sansepolcro. Il Generale dei francescani vietò ai minoriti di Borgo e personalmente a maestro Luca di insegnare ai giovani secolari, pena la scomunica. La disobbedienza di Luca Pacioli suscitò la reazione veemente del Ministro dell'Ordine che impose al padre guardiano di non accogliere frate Luca "rebellem patri reverendissimo" nel convento francescano di Borgo. La soluzione definitiva del dissidio col Generale dell'Ordine dei Minoriti si ha l'anno successivo quando frate Luca interviene nel capitolo dei frati il 29 maggio 1492. Il 18 aprile 1493 il "Reverendum et sacre pagine professorem Magistrum Lucam Bartolomei de dicto Borgo" viene nominato procuratore del Convento di Sansepolcro e nella sua città natale Pacioli non si limita a raccogliere discepoli matematici, architetti e scultori - dei quali stila un elenco nell'introduzione al *Trattato dell'architettura* - ma assolve le proprie funzioni di *magister theologiae*, come del resto ama firmarsi nelle opere di matematica, predicando la quaresima del 1493.

Dopo un breve soggiorno a Padova Pacioli viene richiamato ad Assisi e quindi si reca ad Urbino, il centro rinascimentale nel quale maggiormente si prestava attenzione all'umanesimo matematico. Nata in seguito alle imprese militari di Federico da Montefeltro la Urbino rinascimentale, insieme a Pienza, è la città che meglio rappresenta l'ideale di progettazione architettonica finalizzata all'organizzazione e alla pianificazione dell'impianto urbanistico. Il maestoso complesso del palazzo ducale, realizzato in diversi tempi da architetti come Luciano Laurana e Francesco di Giorgio Martini, dominava l'intero ducato dei Montefeltro e ospitava al suo interno una delle più raffinate biblioteche rinascimentali, diretta da Vespasiano da Bisticci e fornita perfino degli schedari delle altre maggiori biblioteche del tempo.

La vita che si svolge all'interno del palazzo è quella che traspare dalle pagine del *Cortegiano* di Baldassarre Castiglione, ambientate nella corte di Urbino del 1506. Cinquecento persone tra pittori, poeti, architetti, scultori e nobili, si intrattengono in feste e giochi, alla realizzazione dei quali molto spesso sono chiamati artisti e scienziati di tutto rispetto. Durante le due generazioni dei duchi Federico e Guidubaldo ruotano intorno al palazzo artisti del calibro di Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Pietro Berruguete, Francesco Laurana, Francesco di Giorgio Martini, Bramante, Raffaello, Melozzo da Forlì, Giusto di Gand. A questi si aggiungono gli intarsiatori e gli artigiani che realizzano lo studiolo del Duca: primo fra i quali Baccio Pontelli.

Il clima che si respira a Urbino si può intuire leggendo tra le righe della patente rilasciata nel 1468 da Federico da Montefeltro a Luciano Laurana per la costruzione del palazzo ducale. Il duca non manca di apprezzare gli artisti dotati della «virtù» dell'architettura, «fundata in l'arte dell'aritmetica e geometria, che sono delle sette arti liberali, e delle principali, perché sono in primo grado certitudinis» .

Fig. 8 - Piero della Francesca, *Sacra conversazione,* Milano, Pinacoteca di Brera (1472-74)

L'idea del duca di dedicarsi allo studio delle matematiche quale fondamento dell'architettura è di matrice albertiana. Non a caso Leon Battista Alberti e Piero della Francesca sono assidui frequentatori della corte urbinate. In particolare, il pittore burgense realizza per Federico diverse opere: la *Flagellazione*, il *Dittico dei duchi* e la cosiddetta *Pala di Brera.* Le stesse opere matematiche di Piero della Francesca, il *De prospectiva pingendi* e il *Libellus de quinque corporibus regularibus*, realizzate per Federico da Montefeltro e suo figlio Guidubaldo, testimoniano un ambiente culturale nel quale probabilmente Pacioli aveva soggiornato prima del 1494. Ad avvalorare quest'ipotesi concorre il fatto che la stessa *Summa* è dedicata al duca Guidubaldo, alla cui corte Pacioli si era intrattenuto insieme a Ottaviano degli Ubaldini, Ludovico Odasio e Paul von Middelburg.

7 - Luca Pacioli e Piero della Francesca

Giorgio Vasari, nelle sua biografia di Piero della Francesca, elogiava, oltre alle notevoli doti artistiche e prospettiche, le straordinarie competenze geometriche del pittore di Sansepolcro e non esitava ad affermare "che nessuno più di lui fu mirabile nelle cognizioni delle cose di Euclide, e tutti i migliori giri tirati ne' corpi regolari egli meglio ch'altro geometra intese, et i maggiori lumi che di tal cose ci sieno, ci son di man sua; perché Maestro Luca dal Borgo frate di San Francesco che sopra i corpi regolari della geometria scrisse, fu un suo discepolo: et venendo in vecchiezza Pietro, che aveva composto di molti libri, Maestro Luca facendoli stampare tutti gli usurpò per se stesso come già s'è detto di sopra" (G. Vasari, *Le vite de' più eccellenti architetti, pittori, et scultori italiani, da Cimabue insino a' tempi nostri: descritte in lingua Toscana da Giorgio Vasari Pittore Aretino. Con una sua utile et necessaria introduzzione a le arti loro,* Firenze, 1550, pp. 366-67).

Dei libri matematici di Piero della Francesca Vasari dice inoltre che, circa 60 anni dopo la morte del pittore, "nel Borgo, sua patria, a' dì nostri ancora si conservano". Il "processo" storico a Luca Pacioli per l'accusa di plagio, dopo Vasari, si è trascinato fino ad oggi ed ha diviso gli studiosi in due schieramenti: ad una folta schiera di "colpevolisti" si è opposto uno sparuto gruppo di "innocentisti", che hanno tentato di assolvere il frate di Sansepolcro con attenuanti generiche e per insufficienza di prove. In realtà nel rapporto fra Piero della Francesca e Luca Pacioli la questione del plagio è ormai acclarata ma dal punto di vista storico è stata fuorviante, poiché da una parte ha eclissato le ricerche sugli eventuali rapporti personali fra i due grandi personaggi di Sansepolcro, dall'altra non ha tenuto conto degli effetti del plagio di Pacioli sullo sviluppo del pensiero matematico e artistico del XVI secolo. Per quanto deplorevole sotto il profilo morale, l'opera del frate di Sansepolcro è stata, infatti, provvidenziale per la diffusione della geometria di Piero e del genere dei poliedri fra i matematici e gli artisti del '500. Se non fosse stato per l'ampia diffusione a stampa della *Summa* e della *Divina proportione* i risultati ottenuti da Piero sui poliedri nel *Trattato d'abaco* e nel *Libellus de quinque corporibus regularibus* sarebbero rimasti sepolti negli scaffali di una biblioteca senza contribuire minimamente allo sviluppo delle scienze matematiche e delle arti del Rinascimento!

Più che sulla questione del plagio è utile, invece, soffermarsi a valutare la fondatezza storica di alcune informazioni riportate nelle *Vite* da Vasari qualche decennio dopo la morte di Piero. La prima e più interessante affermazione è che "Maestro Luca dal Borgo frate di San Francesco che sopra i corpi regolari della geometria scrisse" fu "discepolo" di Piero della Francesca. Se Vasari dice il vero allora dovremmo domandarci: in che periodo il pittore insegnò la geometria dei corpi regolari a frate Luca?

Se si intrecciano le biografie dei due grandi personaggi di Sansepolcro, le finestre temporali che potrebbero lasciar supporre una contemporanea presenza e un'evenutale frequentazione fra Piero e Luca sono soltanto tre: fra il 1459 e il 1463, fra il 1472 e il 1475 e nella seconda metà degli anni '80. Nel 1459 Pacioli, però, aveva tra gli 11 e i 13 anni ed è abbastanza inverosimile che Piero lo istruisse sulla geometria dei poliedri regolari contenuta nel XIII libro degli *Elementi* di Euclide. Fra il 1472 e il 1475 Piero e Luca erano entrambi a Sansepolcro. Il pittore aveva sessanta anni, il frate invece era un venticinquenne. É improbabile, però, che in questo triennio Piero insegnasse la geometria dei poliedri regolari a Luca Pacioli: nel *Trattato d'abaco* scritto da frate Luca per i discepoli perugini nel 1478 infatti non c'è traccia di problemi sui corpi regolari. Se Maestro Luca è stato "discepolo" di Piero della Francesca, è possibile ipotizzare una loro relazione intellettuale in due periodi degli anni '80: fra l'estate del 1484 e il maggio del 1485 o fra l'aprile del 1488 e il luglio del 1489; due periodi in cui Pacioli è attestato a Sansepolcro in una serie di documenti d'archivio. A questi anni del resto risale l'unico documento finora noto che certifica la contemporanea presenza di Piero e Luca al Borgo. Si tratta di un atto notarile del 20 settembre 1484 che contiene le disposizioni testamentarie della terziaria francescana laica Nera di Pietro di Veltre (ASF, Notarile Antecosimano 3039, nn. 11 e 12). L'atto fu stilato nel chiostro del convento francescano di Sansepolcro alla presenza di Frate Luca, nelle vesti di guardiano del Convento, e sette testimoni fra cui "Magistro Petro olim Benedicti de Franciscis". Nel 1484 Pacioli aveva fra i trentasei e i trentotto anni; Piero della Francesca era ormai ultrasettantenne. Che i due si conoscessero è, quindi, fuori dubbio. La casa di Piero, del resto, è di fronte al Convento di San Francesco ed è abbastanza inverosimile che il pittore e il frate non si siano mai parlati!

Fig. 9 – Angelo Tricca, *Piero della Francesca detta le regole di geometria a Luca Pacioli* (olio su tela, XIX secolo), Museo Civico, Sansepolcro

Frate Luca era già *Magister theologiae* ed era un apprezzato insegnante di matematica abachistica. Aveva già scritto nel 1470 un trattato d'abaco per i fratelli Rompiasi, un ponderoso manuale di matematica commerciale, algebra e geometria per i discepoli di Perugia (il codice Vat. Lat. 3129) e un altro testo "de casi più suttili e forti" a Zara, dove era stato chiamato ad insegnare nel 1481. Frate Luca a Perugia si era procurato un manoscritto contenente gli *Elementi* di Euclide e in quegli anni stava affinando le sue conoscenze matematiche e l'interesse per i poliedri regolari. Non è del tutto escluso quindi che potesse entrare in contatto con Piero della Francesca e discutere con lui proprio di queste sezioni più impegnative della geometria euclidea. Non sappiamo se fu grazie agli insegnamenti di Piero o mediante un percorso autonomo che nacque in frate Luca la passione per i poliedri regolari. Quel che è certo, però, è che nel 1489, quando fu chiamato a Roma ad insegnare matematica, già aveva costruito modelli in legno dei corpi platonici e li aveva mostrati a Guidubaldo da Montefeltro, durante una visita del duca a papa Innocenzo VIII, a casa del cardinale Giuliano della Rovere.

Non sappiamo se nel 1489 Pacioli già possedesse una copia del *Trattato d'abaco* di Piero, ma quel che è certo è che l'interesse di frate Luca per i cinque poliedri regolari non derivava soltanto dallo studio degli *Elementi* di Euclide, bensì aveva anche una radice filosofico-teologica, maturata negli anni del suo dottorato in teologia (1481-1484). È suggestivo immaginare che nella seconda metà degli anni '80 frate Luca e il suo più illustre concittadino si fossero intrattenuti a discutere dei poliedri regolari e dei problemi geometrici ad essi connessi. Non abbiamo alcuna prova per affermarlo ma se, come dice Vasari, Piero, "venendo in vecchiezza", fu maestro di Luca, allora è bene sottolineare che l'anziano pittore ebbe come "discepolo" un allievo molto speciale. Frate Luca, infatti, a quel tempo non solo era un maestro d'abaco stimato a tal punto da essere chiamato ad insegnare nell'ateneo di Perugia, ma era anche *magister theologiae* e possedeva un livello di conoscenze matematiche e teologiche tale da capire e apprezzare la raffinata geometria contenuta nelle opere matematiche del pittore di Sansepolcro.

Quello che è certo, comunque, è che quando Piero nel 1492 morì Pacioli era a Sansepolcro. Dopo la morte di Piero frate Luca rimase nel Borgo fino al 1493 e molto probabilmente venne in possesso di una copia del *Trattato d'abaco* del pittore. Da quest'opera trasse, con qualche variante, i 56 problemi sui poliedri regolari e semiregolari contenuti nella seconda parte della *Summa* (69v-73v).

L'intervento di Pacioli si limita a qualche piccola modifica del testo pierfrancescano. Compare, però, nella *Summa* una breve introduzione, che conferisce al trattatello un significato filosofico che invece non appare in Piero. I poliedri regolari, infatti, da una parte permettono a Pacioli di inoltrarsi negli ultimi libri degli *Elementi* e di completare così la versione "pratica" della geometria euclidea, esposta nella *Summa;* dall'altro gli consentono di introdurre nell'ambiente culturale dei "pratici vulgari" tematiche filosofiche di matrice platonica connesse alla dottrina delle forme geometriche dei cinque elementi contenuta nel *Timeo*. È con queste due motivazioni che frate Luca presenta il trattatello sui corpi regolari al

Duca Guidubaldo da Montefeltro:

> "Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria incipit.
> E benché di sopra in questo nella distintion 6 al capitolo IV de la mesura de la sphera succintamente fosse ditto abbastanza, non dimeno me par questo excelso Duca particularmente dir de alquanti corpi essentiali in ditta sphera locabili, de li quali un angolo toccando subito, tutti toccano; e principalmente lo fo per la notitia de li 5 regulari di quali Euclide a pieno nelli ultimi soi libri scientificamente tratta. Di che me pare non inutile a ponere de loro certi casi aciò li pratici vulgari ancora essi qualche dolcezza di lor dimensioni sentino. Di questi fra' phylosophi si fa gran discussioni. E maxime de ben el Thymeo del divin Platone (secondo lo Aurelio doctor Sancto Augustino) con diligenza s'atende. Dove de universi natura diffusamente parlando spesso a suo proposito li induci. Attribuendo lor forme separatamente ali 5 corpi semplici; cioè: Terra, Acqua, Aeri, Fuoco, e Cielo" (*Summa*, seconda parte, c. 69v).

Lo scopo principale del trattatello, quindi, è l'illustrazione del XIII libro degli *Elementi,* in cui Euclide "scientificamente tratta" i 5 poliedri regolari, affinché "li pratici vulgari" possano apprezzare "qualche dolcezza di loro dimensioni". La *Summa,* del resto, è un'opera che si configura come un ponte fra la cultura dotta e quella tecnica. Così anche i poliedri regolari, dei quali "fra phylosophi si fa gran discussioni", diventano un "genere" del quale i tecnici, e in particolare gli artisti, possono apprezzare la bellezza e il significato metafisico. È opportuno rilevare a questo proposito che nel *Trattato d'abaco* di Piero i problemi sui poliedri sono inseriti tra gli altri quesiti di stereometria, senza una particolare accentuazione delle loro peculiarità. Nell'opera di Pacioli essi invece costituiscono l'oggetto specifico del *Particularis tractatus* che chiude la *Summa.* Diventano, così, un "genere" della letteratura matematica.

I poliedri regolari sono figure geometriche solide costituite da lati, spigoli e facce uguali. Il tetraedro, che nel *Timeo* viene associato all'elemento fuoco, è composto di quattro triangoli equilateri; l'ottaedro, il poliedro dell'elemento aria, da 8 triangoli equilateri e l'icosaedro, associato all'acqua, è formato da 20 triangoli equilateri. A questi tre poliedri, costruiti con il triangolo equilatero si aggiunge il cubo o esaedro, simbolo della terra, composto di 6 facce quadrate, e il dodecaedro, composto da 12 superfici pentagonali e associato al cielo, cioè all'elemento degli "orbi" celesti. I cinque sferoidi quindi erano carichi di valori simbolici e filosofici, che ben si prestavano a trasposizioni figurative nella pittura e nella scultura.

Né la motivazione filosofica, né l'impiego artistico dei poliedri sono minimamente accennati nel *Trattato d'abaco* di Piero. La sezione del codice Ashburnham 280 (ff. 105r-120r), della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze dedicata ai problemi con i poliedri non porta, del resto, il titolo che poi le sarà dato da Pacioli nella *Summa.* Piero si limita, nel *Trattato d'abaco,* a proporre e risolvere, con metodo abachistico, problemi sui poliedri e cita i 5 corpi regolari una volta soltanto, senza alcuna enfasi filosofica, quando nel trattare l'ottaedro ne fornisce la costruzione "perché ci sieno tucti 5 li corpi regulari".

Prima della stampa della *Summa* Pacioli sicuramente ebbe modo di consultare a Sansepolcro anche un altro libro appartenuto a Piero: l' «Archimede latino» di Iacopo da San Cassiano. Intorno alla metà del XV secolo l'umanista cremonese Iacopo da San Cassiano (1410 ca. – 1454 ca.) tradusse dal greco in latino molte opere di Archimede. Questa traduzione nella seconda metà del XV secolo si diffuse soprattutto grazie a due personaggi: il cardinale Bessarione e Francesco Cereo di Borgo San Sepolcro. Bessarione, probabilmente già nel 1455, prese in prestito dalla Biblioteca Vaticana i "quinterniones aliqui in Latino de geometria Archimedis et certi in pergameno versu". Tali "quinterniones", che costituiscono il manoscritto autografo di Iacopo (Na, Nouv. Acq. Lat. 1538 della Biblioteca Nazionale di Parigi), permisero l'allestimento del Marciano V (Venezia, Biblioteca Nazionale di San Marco, Lat. Z 327 8=1842). A sua volta l'esemplare marciano fu poi alla base della revisione del Regiomontano che, trovandosi in Italia tra il 1461 e il 1467, non soltanto ne trasse copia, ma intervenne sull'antigrafo per correggerne le figure geometriche più difettose: l'esito delle sue fatiche è rappresentato dal codice N (Nürnberg, Stadtbibliothek, Cent. V 15). Questa prima linea di diffusione, che ha il suo centro di diramazione nel codice V di Bessarione, culminò con l'*editio princeps* di Archimede stampata a Basilea dal Venatorius nel 1544.

Nella seconda metà del XV secolo l' «Archimede» di Iacopo seguì però una seconda via di diffusione, aperta dall'opera di Francesco dal Borgo. Dopo che nel 1458 Bessarione lo restituì alla Biblioteca Vaticana l'autografo di Iacopo (Na) passò nelle mani di Francesco dal Borgo, che lo utilizzò per approntare il lussuoso Urb. Lat. 261 (U). Dal manoscritto di suo cugino Francesco Cereo Piero della Francesca, giovandosi anche dell'autografo di Iacopo, poi apografo F (Biblioteca Riccardiana di Firenze, ms. 106), disegnò le figure mancanti nell'urb. lat. 261, e cioè quelle delle preposizioni finali del libro sulle Spirali e quelle della Quadratura del cerchio.

Sansepolcro, la città di Francesco Cereo, di suo cugino Piero della Francesca e di Luca Pacioli, nella seconda metà del XV secolo divenne una delle sedi del ricupero umanistico di Archimede e uno dei luoghi in cui si cominciò a cercare di assimilarne la geometria per spingersi oltre le colonne d'Ercole della matematica antica.

Che Sansepolcro fosse diventata una nuova patria per Archimede lo si evince da un promemoria di Leonardo da Vinci risalente al 1502. Leonardo, infatti, annota sul f. 2r del Manoscritto L: "Borges ti farà avere Archimede del vescovo di Padova e Vitellozzo quello da il Borgo a San Sepolcro".

Il codice di Archimede a cui allude Leonardo è proprio l'autografo di Iacopo che Pacioli utilizzò nelle ultime carte della sezione geometrica della *Summa,* per dimostrare, sulla scia del *De sphaera et cylindro* del siracusano, che la superficie della sfera è quadrupla del cerchio massimo in essa contenuto. Le figure della proposizione I.33 presenti nella *Summa*, infatti, ricalcano quelle dell'autografo di Iacopo e non quelle disegnate da Piero e da suo cugino Francesco Cereo. La proposizione I.33, che insieme alla successiva riguardante il volume, costituisce il risultato più importante del libro *De sphaera et cylindro,* viene utilizzata da Pacioli per la soluzione dei problemi sui segmenti sferici contenuti nel *Particularis tractatus circa corpora regularia* della *Summa.* Frate Luca, nel rivisitare alcuni problemi presenti nel *Trattato d'abaco* di Piero, integra il testo del pittore con precise citazioni del testo di Archimede che trae proprio dall'autografo di Iacopo di San Cassiano, che Piero ancora possedeva e che aveva utilizzato per disegnare, nella sua copia (Biblioteca Riccardiana di Firenze, ms. 106) le figure del libro sulla *Quadratura della parabola* che non aveva trovato in U, cioè nel manoscritto di Francesco Cereo.

Pacioli, dopo la morte di Piero, ebbe quindi accesso ai libri del pittore. Le sue relazioni con i parenti di Piero, del resto, sono attestate da numerosi atti notarili fra il 1495 e il 1517. Non è azzardato supporre pertanto che Pacioli, per i buoni rapporti con la famiglia e gli eredi di Piero della Francesca, riuscì a procurarsi anche la versione volgare del *Libellus de quinque corporibus regularibus* che poi pubblicò come terza parte del volume a stampa della *Divina proportione* nel 1509.

L'interesse per i poliedri costituirà il filo conduttore delle ricerche matematiche e della visione cosmologica di Pacioli fino alla sua morte. Piero della Francesca e/o i suoi libri alimentarono il fuoco della passione di frate Luca per i corpi regolari e semiregolari, ma sarebbe ingeneroso e storicamente riduttivo affermare che tutto quello che scrisse Pacioli sui poliedri fu saccheggiato dai manoscritti di Piero. Il *Compendium de divina proportione,* del resto, non solo è diverso nello stile e nel contenuto dalle opere del pittore di Sansepolcro, ma presenta novità importanti sia nella costruzione di nuovi poliedri non noti a Piero, come ad esempio, il rombicubottaedro (il corpo di 26 basi che compare nel *Doppio ritratto* di Capodimonte) e i poliedri stellati, sia nell'impostazione metafisica e cosmologica, del tutto assente nel *Trattato d'abaco* e nel *Libellus*.

Invano si cercherebbero tra gli scritti di Piero indizi che attestino idee filosofiche inerenti all'immagine geometrica che Pacioli ha del mondo naturale. Le questioni risolte nel *Trattato d'abaco* del pittore procedono per lo più in modo erratico con lo stile tipico dei libri d'abaco. Siamo di fronte a meri problemi di calcolo, che implicano l'uso degli strumenti aritmetici e algebrici più raffinati, approntati dalla tradizione abachistica. Eppure i problemi stereometrici di Piero sembrano un corpo estraneo all'interno della matematica pratica. Essi, infatti, non esibiscono alcuna ricaduta applicativa, ed inoltre si avventurano nella intricata selva di proposizioni contenute negli ultimi libri degli *Elementi.* Piero dimostra un'ottima padronanza del testo euclideo; lo stile della sua matematica tuttavia resta abachistico. Il pittore rielabora l'opera di Euclide con il linguaggio aritmetico e algebrico di Fibonacci, dando luogo ad un ibrido matematico al confine fra la matematica dotta e quella dei "pratici vulgari".

I problemi sui poliedri proposti da Piero della Francesca, pur non alludendo minimamente alle dottrine filosofiche ad essi relative, sottendono, quindi, un implicito e costante richiamo alle proposizioni degli *Elementi.* Nel libro di Euclide sono, infatti, contenute le dimostrazioni delle proporzioni che volta a volta Piero adopera per risolvere questioni stereometriche. Il nesso tra poliedri regolari e proporzioni nel *Trattato d'abaco* è implicito. Occorrerà attendere l'elaborazione più sistematica del *Libellus* per esplicitarlo. Luca Pacioli, sulla scia dei trattati di Piero, individua nei poliedri regolari il nucleo della sua ricerca scientifica. Il *Compendium de divina proportione* del 1498, infatti, si apre in modo emblematico con una terzina in cui si immagina che i corpi regolari si rivolgano al lettore con queste parole:

Corpora ad lectorem

El dolce fructo vago e sì dilecto.
Constrinse già i Philosophi cercare.
Causa de noi che pasci l'intelletto.

I corpi regolari e la loro costruzione tramite le proporzioni sono l'argomento principale della *Divina proportione.* La trattazione dei poliedri, in quest'opera, oscilla tra la geometria degli *Elementi* e la cosmologia del *Timeo.* Pacioli, a differenza di Piero, esplicita, infatti, sia i presupposti euclidei della dottrina dei 5 corpi regolari, sia i risvolti cosmologici da essi derivanti. Ora, se Euclide costituisce il referente sottinteso anche dell'opera di Piero, Platone viene tirato in ballo da Pacioli per un fine estraneo agli interessi del pittore. Frate Luca, infatti, nel tradurre in volgare il XIII libro degli *Elementi* non intende tanto supportare teoricamente i problemi sui poliedri risolti nello stile abachistico di Piero, quanto piuttosto fondare matematicamente una dottrina cosmologica che implica l'immagine geometrica del mondo.

8 - La stampa della «*Summa*» *(1494)*

Dopo un probabile soggiorno a Urbino, nel corso del quale Pacioli manifestò il desiderio di dedicare la sua opera al duca Guidubaldo e di sottoporla al giudizio dei suoi matematici di corte, nel 1494 frate Luca si recò a Venezia a collaborare *die noctuque* - come si legge nell'opera - con l'editore Paganino Paganini per la stampa della *Summa*. Con il finanziamento del patrizio veneto Marco Sanuto, che il frate pubblicamente ringrazia nella lettera che apre il libro, si procede all'edizione del mastodontico testo pacioliano, che compendia in lingua volgare il sapere matematico medioevale. La tecnica della stampa a caratteri mobili era comparsa a Venezia già a partire dagli anni settanta - nel 1469 Giovanni Spira fonda la prima tipografia - e subito alcuni attenti imprenditori avevano intuito la portata rivoluzionaria del metodo di Gutenberg, soprattutto nella diffusione dei testi classici, così ricercati e apprezzati dagli umanisti.

Tra gli editori veneziani spiccavano i nomi di Aldo Manuzio e appunto di Paganino Paganini. Le opere di Pacioli sono stampate tutte per i tipi di Paganini con il quale la collaborazione del frate successivamente si estese fino alla realizzazione dei «caratteri» di stampa. Intorno alle tipografie veneziane comincia a crearsi un movimento umanistico, capeggiato da autori come Ermolao Barbaro e Bernardo Bembo, in grado di competere con quello più sviluppato e maturo di Firenze. Anche sul versante prettamente artistico, la Venezia nella quale torna Pacioli nel 1494 presenta più di un motivo di novità rispetto al periodo in cui il frate l'aveva lasciata. Le grandi opere di decorazione - la Sala del Maggior Consiglio e la Scuola di San Giovanni Evangelista - che la Serenissima richiede, sull'esempio delle maggiori Signorie della penisola, producono una forte accelerazione della nuova maniera pittorica adoperata dai Bellini e da Carpaccio. Sono questi, infatti, gli anni nei quali Giovanni Bellini si avvicina molto agli studi prospettici di Piero della Francesca e forse proprio a queste opere si riferisce Pacioli nella Epistola dedicatoria a Guidubaldo quando annovera i veneziani tra coloro che seguono l'*ordo mathematicus* nella pittura.

9 - Nella Milano di Ludovico il Moro: Luca Pacioli e Leonardo da Vinci.

Si hanno poi notizie certe di Pacioli quando si trasferisce a Milano, chiamato da Ludovico il Moro per insegnare matematica. Dopo il governo di Francesco Sforza e l'intermezzo di suo figlio Galeazzo Maria, il ducato di Milano era passato (1480) nelle mani di Ludovico, fratello di Galeazzo e zio del legittimo erede, ancora minorenne, Gian Galeazzo. Ludovico il Moro si rese promotore di un rilancio economico e culturale dello stato mediante una politica che incoraggiava la produzione agricola e la realizzazione di un'efficiente rete di navigli, adoperabili sia per il trasporto che per l'irrigazione.

Lo stesso Ludovico presso la villa di Vigevano, chiamata la Sforzesca, teneva un modello di quella che doveva essere la fattoria ideale, la cosiddetta Pecorara. Il rilancio del ducato di Milano è tuttavia immediatamente visibile, più che nelle iniziative economiche, nelle relazioni politiche e culturali allacciate dal Moro. Il suo matrimonio con Beatrice d'Este inseriva la casata sforzesca in un ambiente cortigiano nel quale le parentele si estendevano a tutte le maggiori famiglie della penisola (Beatrice era figlia di Alfonso di Calabria). Il prestigio militare del ducato era invece ottenuto grazie alla fama di Galeazzo Sanseverino, al quale Ludovico consegnò, oltre il comando generale dell'esercito, anche la mano di sua figlia Bianca. Il Moro e Sanseverino sono i personaggi intorno ai quali ruota la vita politica e culturale della Milano di fine secolo. Non a caso Pacioli dedica la sua *Divina proportione* sia a Ludovico il Moro che a Galeazzo, suo particolare protettore.

Il mecenatismo del Moro è, insieme a quello del Magnifico, forse quello maggiormente vistoso nel panorama dell'Italia rinascimentale. Intorno al castello sforzesco gravitavano infatti artisti quali Bramante, Leonardo, Bernardino dei Conti; storici come Tristano Calco e Giovanni Simonetta, umanisti e retori quali Giorgio Merula e il giovane Ermolao Barbaro; grecisti come Demetrio Calcondila; un teorico musicale del calibro di Franchino Gaffurio e un numero cospicuo di ritrattisti, minatori, arazzieri, incisori, maestri del legno, orafi, poeti, astrologi e medici. A questo periodo del resto risalgono i progetti e le opere milanesi di Bramante: Santa Maria di San Satiro, il Duomo di Pavia, il Castello di Vigevano, Santa Maria delle Grazie; e alcune fra le opere più famose di Leonardo da Vinci: la tentata fusione del cavallo sforzesco, la *Vergine delle rocce*, il *Cenacolo* e il ritratto della *Dama con l'ermellino*, le madonne *Litta* e *Benois*, e la monumentale documentazione degli studi di anatomia, meccanica, prospettiva, architettura e ingegneria, databili nel corso del soggiorno milanese dell'artista.

Il rapporto che lega il matematico di Sansepolcro e l'artista vinciano costituisce senza dubbio uno dei casi di studio più illuminanti per la comprensione del nesso fra dotti e tecnici che si venne ad instaurare durante il Rinascimento. Il frate matematico, autore della *Summa,* e l'artista universale simbolo del Rinascimento costituiscono del resto una coppia culturalmente complementare. Leonardo cerca nel matematico i fondamenti della geometria euclidea e un necessario ausilio didattico per l'accesso linguistico alla matematica classica, visto che per l' "omo sanza lettere" l'ostacolo del latino era pressoché insormontabile. Luca Pacioli, da parte sua, vede nella "ineffabile sinistra mano" di Leonardo la migliore soluzione al problema di rappresentare i poliedri regolari e "dipendenti" nelle 60 tavole che costituiscono il necessario corredo visuale alla sua *Divina proportione.*

La mutua attrazione fra questi due grandi personaggi del Rinascimento comincia ancora prima della loro relazione di amicizia. Leonardo, infatti, prima di incontrare il frate ha già acquistato la *Summa de arithmetica geometria, proportioni et proportionalita,* per 119 soldi, visto che quel testo, scritto in volgare, compendiava tutto lo scibile matematico da Leonardo Fibonacci in poi e costituiva la porta di accesso alla matematica degli antichi.

Quando Pacioli si reca a Milano nel 1496, trova una città in pieno fermento economico e culturale. Ludovico il Moro, infatti, era stato promotore di un rilancio del ducato mediante una politica che incoraggiava la produzione agricola e la realizzazione di un'efficiente rete di navigli, adoperabili sia per il trasporto che per l'irrigazione. Lo stesso Leonardo da Vinci fu chiamato a contribuire alla riorganizzazione urbanistica di Milano e in questo ambiente culturale si inserisce il progetto di una città a tre livelli, ideato dal vinciano.

La corte di Ludovico il Moro è la sede di incontri e conversazioni fra gli umanisti e gli eruditi che il duca ospita. Pacioli, nel rammentare lo «scientifico duello» da cui trae ispirazione per scrivere la *Divina proportione*, fornisce un dettagliato elenco dei dotti cortigiani in mezzo ai quali si trova. Fra questi, tuttavia, l'attenzione del frate cade su Leonardo da Vinci, «nostro compatriota fiorentino, qual de scultura, getto e pittura con ciascuno el cognome verifica: commo l'ammiranda e stupenda equestre statua [...] col ligiadro de l'ardente desiderio de nostra salute simulacro nel degno e devoto luogo de corporale e spirituale refezione del sacro templo de le Gratie de sua mano penelegiato, al quale oggi de Apelle, Mirone, Policreto e gli altri, convien che cedino, chiaro el rendano».

Del maestoso monumento equestre dedicato a Francesco Sforza e progettato da Leonardo, Pacioli riferise accuratamente le misure, alludendo al modello di terra approntato per la fusione in bronzo del cavallo, peraltro mai avvenuta.

Circa invece il *Cenacolo* frate Luca lo considera come un modello esemplare della pittura, intesa come verosimile imitazione della natura, in quanto fondata sulle discipline matematiche. Nella disputa sulle arti che attraversa tutto il XV secolo e che si sviluppa anche alla corte di Ludovico il Moro, l'opera di frate Luca si schiera decisamente a favore dell'introduzione della pittura nell'ambito delle arti del quadrivio, e in questa sua opera di promozione culturale della prospettiva condivide molte delle tesi sostenute da Leonardo da Vinci e pubblicate postume da Francesco Melzi nella raccolta di appunti nota come *Trattato della pittura* tratta dal Codice A e da altri manoscritti ora perduti. Il vocabolo μαθηματικος precisa Luca dal Borgo. "in nostra lengua sona quanto a dire disciplinabile", vale a dire suscettibile di essere insegnato;

> "e al proposito nostro per scienze e discipline mathematici se intendano aritmetica, geometria, astrologia, musica, prospettiva, architettura e cosmographia e qualunc'altra da queste dependente. Nondimeno communamente per li savi le quatro prime se prendano, cioè aritmetica, geometria, astronomia e musica, e l'altre fienno dette subalternate, cioè da queste dependenti".

Il frate di Sansepolcro, conducendo una serrata argomentazione a favore della prospettiva, rompe il sistema scolastico delle arti del quadrivio, sfidando l'autorità di Isidoro di Siviglia "in le sue *Ethimologie*" e di Severino Boezio "in sua *Arithmetica*". L'argomento di Pacioli, rintracciabile anche nei manoscritti di Leonardo, procede attraverso il "paragone" fra la musica e la prospettiva e perviene alla conclusione secondo cui le due discipline o si devono escludere entrambe dalle arti liberali o si devono entrambe ammettere.

> "Ma el nostro iudicio, benché imbecille e basso sia, o tre o cinque ne costrigne, cioè aritmetica, geometria e astronomia, escludendo la musica da ditte, per tante ragioni; quella agiognendo a le ditte quatro per quante quelli a le ditte nostre tre la musica".

Le ragioni per cui la musica viene considerata una disciplina matematica sono per Pacioli equivalenti, o forse anche di minor rigore, di quelle che permettono di definire la prospettiva come una scienza matematica. Se la musica accontenta il piacere dell'udito, la prospettiva risulta senza dubbio più nobile poiché gratifica il senso della vista, che - come ricordano Pacioli e Leonardo - è la "prima porta a l'intelletto". La musica si attiene al numero sonoro e ai rapporti semplici che definiscono gli accordi di ottava (1:2), quinta (2:3) e quarta (3:4); la prospettiva, invece, si riferisce al "numero naturale [...] e a la mesura de la linea visuale". La prima quindi suscita l'armonia nell'anima attraverso proporzioni armoniche riconducibili, in base alla tradizione pitagorica, ai primi quattro numeri interi; la seconda adopera proporzioni aritmetiche e geometriche per riprodurre la scansione ritmica della natura, come si può notare nel *Cenacolo* di Leonardo, dipinto nel refettorio di Santa Maria delle Grazie.

Fig. 10 – Leonardo da Vinci, *Cenacolo*, Milano, Santa Maria delle Grazie (1495-97).

> "E tanto la pittura immita la natura - scrive Pacioli - quanto cosa dir se possa. El che agli ochi nostri evidentemente apare nel prelibato simulacro de l'ardente desiderio de nostra salute, nel quale non è possibile con magiore atenzione vivi li Apostoli immaginare al suono de la voce de l'infallibil verità quando disse: *unus vestrum me traditurus est,* dove con atti e gesti l'uno a l'altro e l'altro a l'uno con viva e afflitta ammirazione par che parlino, sì degnamente con sua ligiadra mano el nostro Lionardo lo dispose".

Il *Cenacolo* leonardesco, del quale Pacioli fornisce forse la prima lettura interpretativa della storia dell'arte moderna, è un chiaro esempio di fedele imitazione della natura. La pittura, perciò, al pari della musica possiede tutti i requisiti per essere inserita tra le scienze matematiche. Se si annovera tra queste la musica, allora non si può escludere la prospettiva, e cioè la pittura. Le scienze matematiche *in primo gradu certitudinis* - ribadisce Pacioli - o sono tre o sono cinque.

Certo è che l'elogio di Pacioli alla statua equestre e al *Cenacolo* non è soltanto un omaggio al genio leonardesco, ma anche il sintomo di una più stretta e feconda collaborazione tra i due «compatrioti fiorentini». Leonardo trae dall'incontro col frate i maggiori benefici. È da Pacioli infatti che impara la geometria euclidea e l'algebra, appassionandosi alla soluzione di problemi, quali la quadratura del cerchio e la duplicazione del cubo, con un interesse che andrà aumentando fino a prevalere sulla stessa pittura. Pacioli nei confronti di Leonardo svolgeva quindi un duplice compito: quello di traduttore dal latino della versione degli *Elementi* curata dal Campano e quella di insegnante di matematica.

Gli interessi di Leonardo per la teoria euclidea delle proporzioni e per la costruzione e il disegno dei poliedri regolari risalgono a questo periodo. Pacioli, di contro, si serve dell'arte e dell'abilità grafica di Leonardo per illustrare la costruzione dei poliedri platonici, contenuti nel manoscritto ambrosiano della *Divina proportione:*

> "Comme apien in le dispositioni de tutti li corpi regulari e dependenti di sopra in questo vedete, quali sonno stati fatti dal degnissimo pittore, prospettivo, architetto, musico e de tutte virtù dotato Lionardo da Vinci fiorentino nella cità de Milano, quando a li stipendii dello eccellentissimo duca di quello, Ludovico Maria Sforza Anglo, ci retrovamo nelli anni de nostra salute 1496, fin al '99".

Nel fecondo scambio culturale fra l'artista e il matematico due sono gli ambiti nei quali è rintracciabile lo scambio di reciproche competenze e abilità: le lezioni su Euclide che il frate di Sansepolcro impartisce per il pittore di Vinci e il disegno delle tavole dei poliedri che Leonardo realizza per Pacioli.

Leonardo, che nel dipingere appariva agli occhi di Pacioli come il "principe oggi fra' mortali", era sicuramente nel campo della visualizzazione dei poliedri il degno erede di Piero della Francesca, il "monarca" della pittura, come lo aveva definito frate Luca nella *Summa*. Leonardo, infatti, realizzò tavole dei poliedri tali "ch'in prospectivo disegno – come notò lo stesso autore della *Divina proportione* - non è possibile al mondo farle meglio". La collaborazione fra il matematico e il pittore avveniva tramite il libro di Euclide, che il primo traduceva in volgare ad uso del suo "conterraneo" toscano.

Prima dell'incontro con Pacioli le conoscenze aritmetiche e geometriche del pittore erano molto limitate e approssimative. L'arrivo a Milano di frate Luca dal Borgo coincise, invece, con un processo di acculturazione matematica di Leonardo, riscontrabile nei codici Forster II (1°), Madrid II, e nei manoscritti M, I, L e K (I e II) dell'Institut de France, databili nel periodo di frequentazione dei due toscani.

Il codicetto Forster II (1°), risalente con buona approssimazione agli anni 1495-97, presenta una importante novità nell'ambito degli interessi geometrici di Leonardo. Nei fogli 38v-39r compaiono segmenti rettilinei, accompagnati da numeri legati fra loro da linee curve: è la tipologia grafica chiaramente riconducile ai trattati sulle proporzioni. Leonardo al foglio 38v sta prendendo appunti di studio per fissare le definizioni di "proporzionalità aritmetica, continua e discontinua". L'interesse per la teoria euclidea delle proporzioni è evidente, ma Leonardo non conosce bene il latino e non può accedere quindi al V° libro degli *Elementi* che pure è disponibile nell'*editio princeps* veneziana del 1482. Ricorre quindi alla *Summa* di Pacioli che alla sesta distinzione compendia il testo euclideo interpolandolo con la tradizione medioevale dei *calculatores* di Oxford veicolata dal *Tractatus de proportionibus* di Alberto di Sassonia. Leonardo studia la *Summa* e nel codice di Madrid 8936 riassume la sesta distinzione dell'opera di Pacioli dal foglio 46 verso al foglio 50 recto.

La dottrina delle proporzioni, del resto, è il nucleo del programma di matematizzazione del sapere perseguito da frate Luca. Leonardo dovette essere particolarmente interessato a questa dottrina, che si ritrova in maniera non trascurabile in almeno tre codici: il Madrid II, il Forster II (1°) e il ms. K dell'Institut de France. Lo stesso albero di c. 78r, presente nel codice, ricalca l'*arbor proportionis et proportionalitatis* contenuto nell'opera di frate Luca (c. 82r).

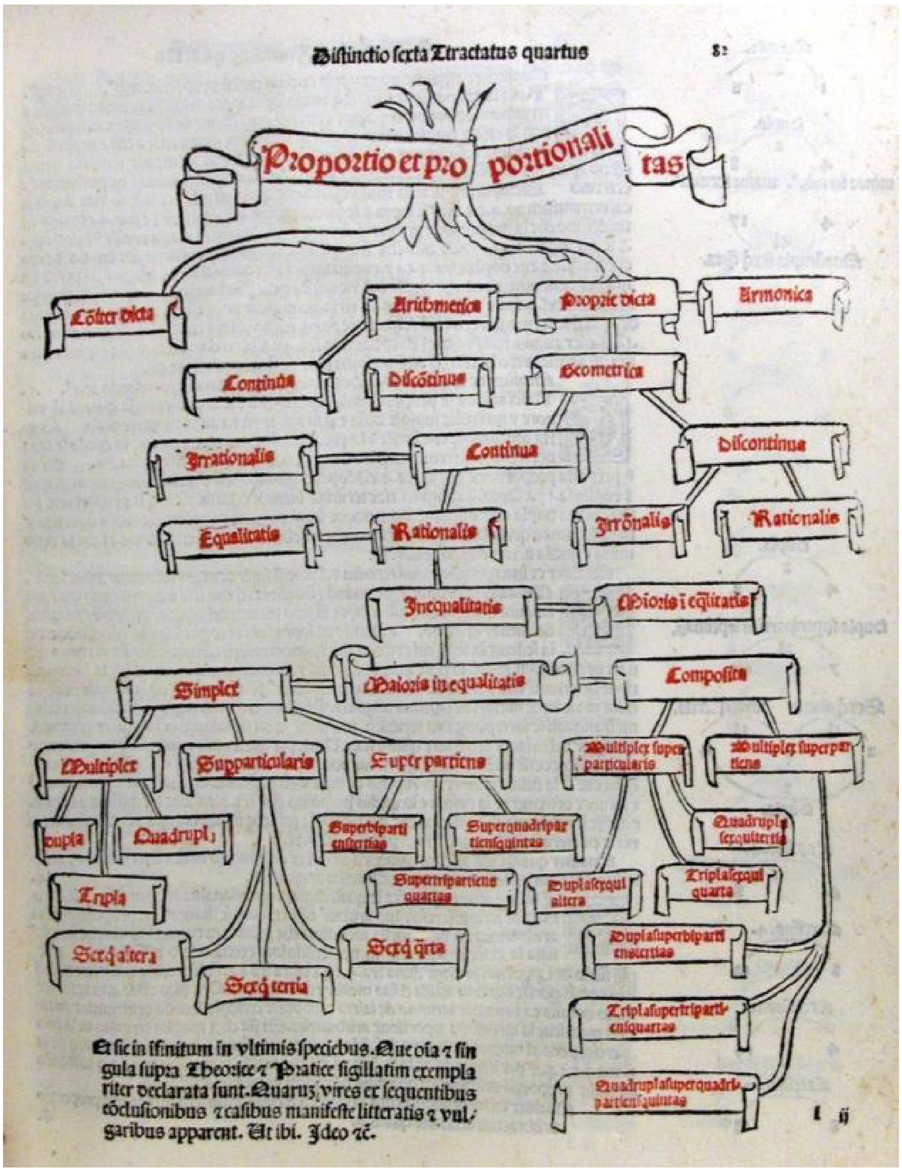


Fig. 11 – Luca Pacioli, Arbor Proportionis et II(f.78r) Proportionalitatis,
De Divina Proportione, Paganino de' Paganini, Venezia, 1509 (c.82r).

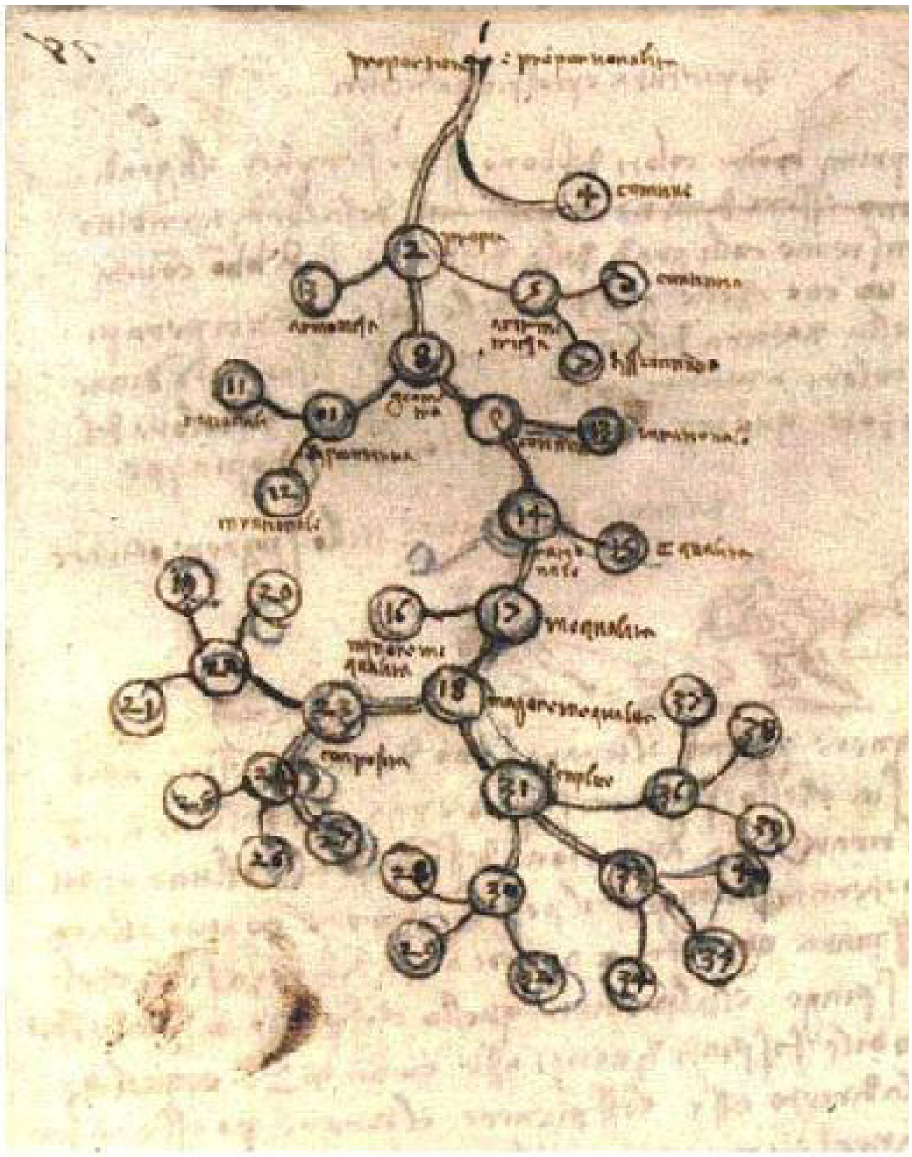


Fig. 12 – Leonardo da Vinci, *Codice di Madrid*

La trattazione di Leonardo in realtà non fa altro che specificare il significato di ogni ramo dell'albero delle proporzioni e si fonda su un passaggio riassuntivo della *Summa* (c. 72r) dove Pacioli illustra la genesi delle diverse specie di proporzioni.

Guidato dal testo del matematico di Sansepolcro, Leonardo (Madrid

II, ff. 47r-50r) si inoltra nella selva per lui precedentemente oscura delle varie specie di proporzioni, semplici e composte, delle quali non manca di riportare esempi numerici chiarificatori, come al foglio 50r dove compaiono le varie specie della *maior inequalitatis.*

Euclide è l'autore che aleggia negli incontri fra il frate e il pittore, quando il primo si presta a svolgere la funzione di maestro di geometria per il secondo. Risultano significativi a questo proposito gli appunti sugli *Elementi* di Euclide presi da Leonardo nei codici M, I, L e K dell'Institut de France e nel Codice Atlantico.

I primi trentasei fogli del codice M, risalente agli anni milanesi di Leonardo e Pacioli (1496-99) sono dedicati quasi interamente alla geometria euclidea. Sul foglio 1r Leonardo annota in alto: "Lezione terza del primo". Si riferisce con ogni probabilità alle lezioni milanesi di Pacioli sugli *Elementi* che, come afferma il frate di Sansepolcro nel *Compendium de divina proportione,* erano giunte nel 1498 al X libro. Leonardo annota nel suo linguaggio critpico, costituito di numeri e disegni schematici, il significato delle lezioni di Pacioli inerenti al primo libro dell'opera euclidea. Il manoscritto M, tuttavia, procede con andamento disorganico e presenta accanto alle proposizioni del primo libro schemi e disegni chiaramente riferibili al X libro degli *Elementi.* Il foglio 6v. del taccuino infatti reca come titolo: "Lezione terza del decimo", e riguarda quelle che Leonardo chiama "quantità comunicanti", ossia aventi un divisore comune. La presenza di proposizioni del difficile libro X (come la 7 al f. 9r., la 6 al f. 11v, , la 10 al f. 15v, la 14 e la 14 ai ff. 16v e 17r, la 15 al f. 19r, la 17 ai ff. 20v e 21r, la 20 ai ff. 24r. e 26v, la 23 al f. 30r) accanto a quelle del primo non trova una immediata spiegazione se non alla luce di quanto diremo in seguito in relazione al ruolo di Leonardo come disegnatore delle tavole della *Divina proportione.*

Per ora ci limitiamo a rilevare come la presenza di maestro Luca aleggi sui taccuini geometrici di Leonardo alle prese con lo studio di Euclide. A questo proposito il codice I, che raccoglie due quaderni di 48 fogli ciascuno, sembra costituire la continuazione delle lezioni euclidee di Pacioli. L'intero primo fascicolo infatti riprende il discorso interrotto nel codice M a partire dalla proposizione 44 del primo libro degli *Elementi.* Anche in questo secondo taccuino la sequenza logica e didattica delle proposizioni del primo e del secondo libro euclideo è talvolta interrotta da proposizioni del decimo (come la 31 al f. 2r). Gli appunti di Leonardo anche in questo caso sembrano essere il risultato di un corso intensivo su

Euclide che procede in parallelo sui primi tre libri e sul decimo.

Lo studio degli *Elementi* continua anche nei manoscritti L e K. Il primo, cominciato nel periodo milanese, registra, dopo la caduta del principato sforzesco del 1499, i passaggi di Leonardo in Romagna al servizio di Cesare Borgia e in Toscana. La presenza di Pacioli è rintracciabile dal confronto incrociato con il *De viribus quantitatis* dove Pacioli, dopo aver descritto un "arlogio pratico marinaresco", del tipo clessidra a mercurio, graduato in modo da indicare le frazioni dell'ora nella boccia inferiore, indica il modo di forare una lama di vetro tra una boccia e l'altra e scrive: "et in quello con diligentia factoli suo foro al modo ditto da te, nel cui ingegno me confido, Leonardo" (Cap. LXXIX, II parte). La presenza del maestro di geometria accanto all'allievo è del resto avvalorata dal codice K, il cui secondo quaderno, costituito da 32 fogli, presenta dal foglio 32v al foglio 24v, procedendo come al solito a ritroso per via della scrittura leonardesca, tutte le proposizioni del secondo libro degli *Elementi*, due proposizioni del terzo e quasi tutto il quarto libro.

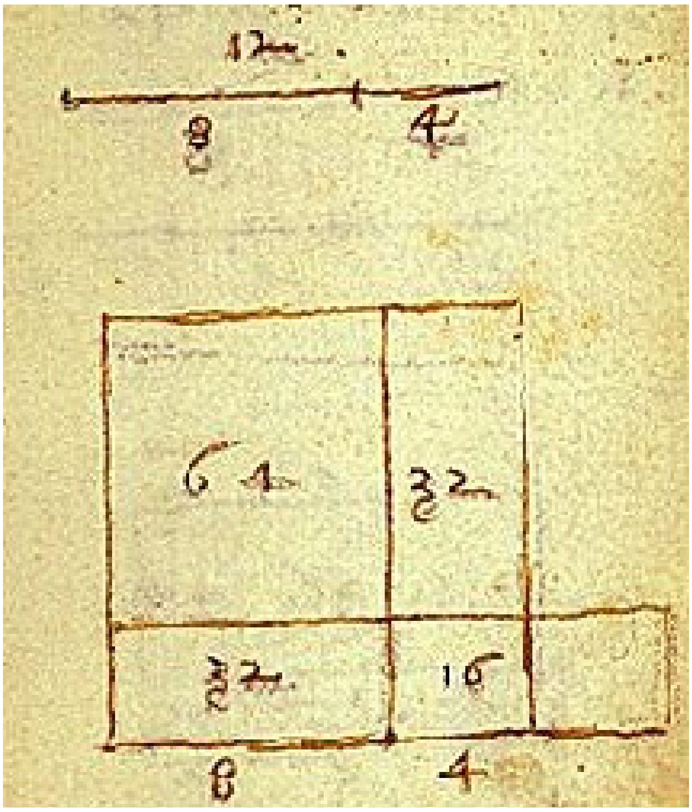


Fig. 13 - Leonardo. Ms. K (f. 28r. Leonardo prende appunti sulla proposizione II.7 degli Elementi. Con l'aiuto di Pacioli, che gli traduce il testo dell'edizione latina degli Elementi curata dal Campano, traduce la proposizione in disegni e numeri. Se usiamo i numeri del vinciano (12 per la retta, 8 e 4 per le sue parti prese a caso) il teorema si risolve nella seguente equazione: $(12^2 + 4^2) = 2\ (12 \times 4) + 8^2$, cioè 160=160
La figura disegnata da Leonardo è diversa da quella dell'Euclide di Campano in quanto raddoppia il piccolo quadrato 16. Lo stesso Leonardo annota a margine "Il 4 vale per i due sopra posti, cioè che 'l 16 s'ha a contare 2 volte"; in altri termini: il quadrato di lato 4 va contato due volte perché i due rettangoli di 12-4 si sovrappongono su quel quadrato minore

Seguono dal foglio 68v al 16v le definizioni del libro V sulle proporzioni, dalla sesta alla sedicesima, a testimonianza di un interesse molto spiccato per la teoria euclidea su proporzioni e proporzionalità, che Leonardo studia a fondo come si evince dal primo dei tre quaderni del codice K, dove compare quasi tutto il libro V, fino al foglio 30v e le definizioni e le prime 24 proposizioni del libro VI.

Tra le proposizioni euclidee, trascritte da Leonardo nel linguaggio grafico, ne compaiono, come è stato già rilevato, alcune riguardanti il libro X degli *Elementi,* sintetizzato da Pacioli nell'ottava distinzione della *Summa,* e rintracciabile in alcuni disegni contenuti nel ms. M. Le lezioni pubbliche di frate Luca a Milano, come si evince dalla *Divina proportione,* riguardavano l'opera di Euclide della quale fino al 1498 erano stati affrontati i primi dieci libri. La trattazione degli irrazionali contenuta nel decimo libro degli *Elementi,* costituiva senza dubbio un argomento ostico per la maggior parte degli studenti che accorrevano alle lezioni milanesi del frate. Ciò nonostante diverse proposizioni di questo libro compaiono sotto forma grafica nei taccuini di Leonardo e in particolare nel codice M dell'Institut de France.

Può sorprendere la presenza di quest'ultimo libro contemporanea a quella del primo, sapendo che il decimo è dei libri degli *Elementi* il meno letto e il più difficile. Esso, però, può avere, come applicazione pratica, un'utilità per la costruzione dei poliedri. E Leonardo non avrebbe potuto sviluppare costruzioni geometriche tanto complesse, come quelle del dodecaedro o dell'icosaedro *planus, vacuus, abscissus, elevatus,* senza approfondire le sue scarse nozioni di geometria.

L'icosaedro e il dodecaedro, infatti, presuppongono la conoscenza dei "binomi e residui" e pertanto Leonardo necessitava di un'infarinatura della classificazione delle grandezze irrazionali contenuta nel 10° libro degli *Elementi.* Dal testo della *Divina proportione* poteva trarre soltanto le informazioni contenute negli ultimi libri, compresi i due spuri, dell'opera di Euclide; per i primi X erano necessarie le "lezioni" di "maestro Luca", che aveva già volgarizzato nel terzo trattato dell'ottava distinzione della *Summa* il difficile X libro degli *Elementi* .

Fig. 14 – Leonardo da Vinci: a sinistra Icosaedro vacuo (*Codice Atlantico*, f. 518r); a destra Icosaedro appeso ad un laccio, come nelle tavole del manoscritto della Divina proportione di Pacioli (*Codice Atlantico, f. 930r*)

"L'ineffabile senistra mano" di Leonardo "a tutte le discipline mathematici acomodatissima" traduceva il linguaggio degli *Elementi* in disegni e portava così a compimento nel migliore dei modi il progetto pacioliano di visualizzazione concreta dei corpi astratti della geometria.

Risulta particolarmente significativo, a questo proposito, il foglio 80v del codice M, che chiarifica la finalità ultima dello studio del X libro degli *Elementi* ivi contenuto.

Leonardo qui trascrive a modo suo la terzina ("tirzetto fatto per li corpi regolari e loro dirivati") che chiude il *Compendium de divina proportione* di Pacioli e disegna lo schizzo dei 5 poliedri regolari indicando il numero delle basi che li costituiscono e i loro nomi traslitterati dal greco*:*

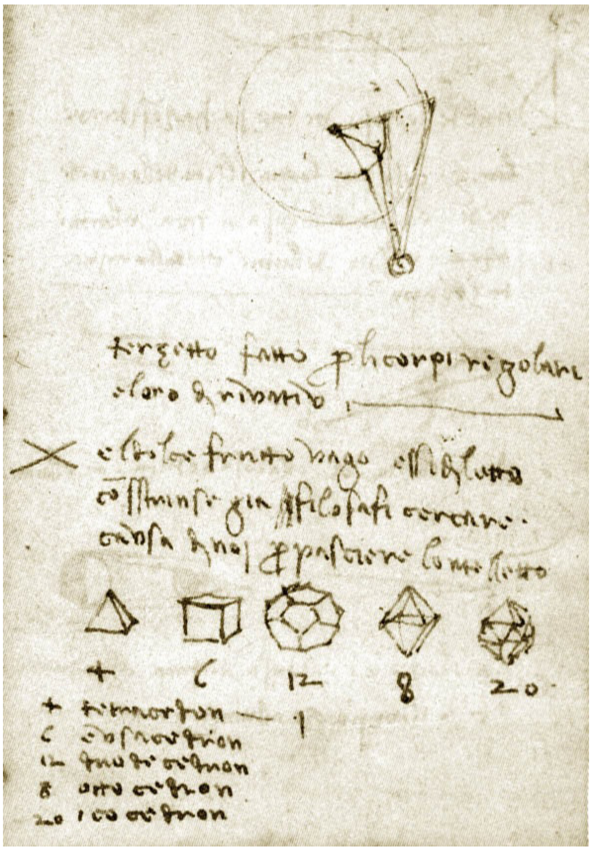


Fig. 15 - Manoscritto M dell'Institut de France (Parigi), f. 80v.
El dolce frutto vago essì diletto
costrinse già i filosafi cercare
causa de noi per pascere lo intellecto

Leonardo, quindi, si inoltra nello studio del difficile libro X degli *Elementi* anche per portare a termine con cognizione di causa il compito a lui richiesto dall'amico e maestro di matematica, Frate Luca Pacioli. La mente poliedrica e versatile di Leonardo, del resto, raramente si accontenta di risolvere un problema specifico prima di aver spaziato ad indagare le molteplici e variegate vie di ricerca che si dipanano dal cuore del problema che sta affrontando. In questo caso il problema del disegno delle tavole apre al vinciano sia la strada per lui ostica degli ultimi libri degli *Elementi,* sia la via filosofica che conduce alla cosmologia platonica del *Timeo*, lapidariamente riassunta da Pacioli e rielaborata alla luce della teologia francescana della divina proporzione.

Numerosi indizi contenuti nel *Compendium* dimostrano che l'opera dedicata al Moro era corredata, oltre che dalle tavole illustrative, anche da esemplari lignei dei poliedri regolari e archimedei che Pacioli aveva costruito. La conferma di forme materiali "colorate e adornate" si ha in un passo del *Tractato di architectura* contenuto nell'edizione veneziana del 1509.

"E le forme de ditti corpi materiali, bellissime, con tutta ligiadria, quivi in Milano de mie proprie mani disposi, colorite e adorne e forono numero 60 fra regulari e lor dependenti. El simile altretanti ne disposi per lo mio patrone Galeazzo Sanseverino in quel luogo. E poi altretante in Firenze a la exempla del nostro signore Confalonieri perpetuo Petro Soderino, quali al presente in suo palazo se ritrovano".

È presumibile quindi che i disegni di Leonardo riproducessero oggetti reali che il pittore aveva di fronte. È lecito ipotizzare che il pittore, più che una rigorosa costruzione dei corpi in pianta, alzato e sezione, abbia usato uno strumento prospettico empirico, come il piano trasparente descritto in una nota del ms. B. dell'Institut de France e disegnato nel Codice Atlantico.

Se si analizzano le tavole della *Divina proportione,* contenute nel codice dell'Ambrosiana (ms. 170 sup.) e del codice di Ginevra (Ms. Langues Etrangères n°. 210), ci si rende conto, infatti, che non tutte le tavole sono in prospettiva. Il tetraedro "abscisus" e il cubo, ad esempio, sembrano seguire le indicazioni geometriche del testo di Pacioli e appaiono del tutto analoghi a quelli disegnati dallo stesso frate. Gli effetti tridimensionali sono ottenuti da Leonardo soprattutto con il colore e il chiaroscuro. La prospettiva usata negli altri casi evidenzia inoltre un continuo cambiamento del punto di vista da una tavola all'altra. È presumibile quindi che il lavoro di Leonardo, finalizzato a rendere visibili le “forme materiali” dei poliedri, consistesse più in un accomodamento a occhio della migliore prospettiva adatta allo scopo illustrativo che ad una meticolosa costruzione di pianta, alzato e profilo, usata poi per la corretta prospettiva dei solidi.

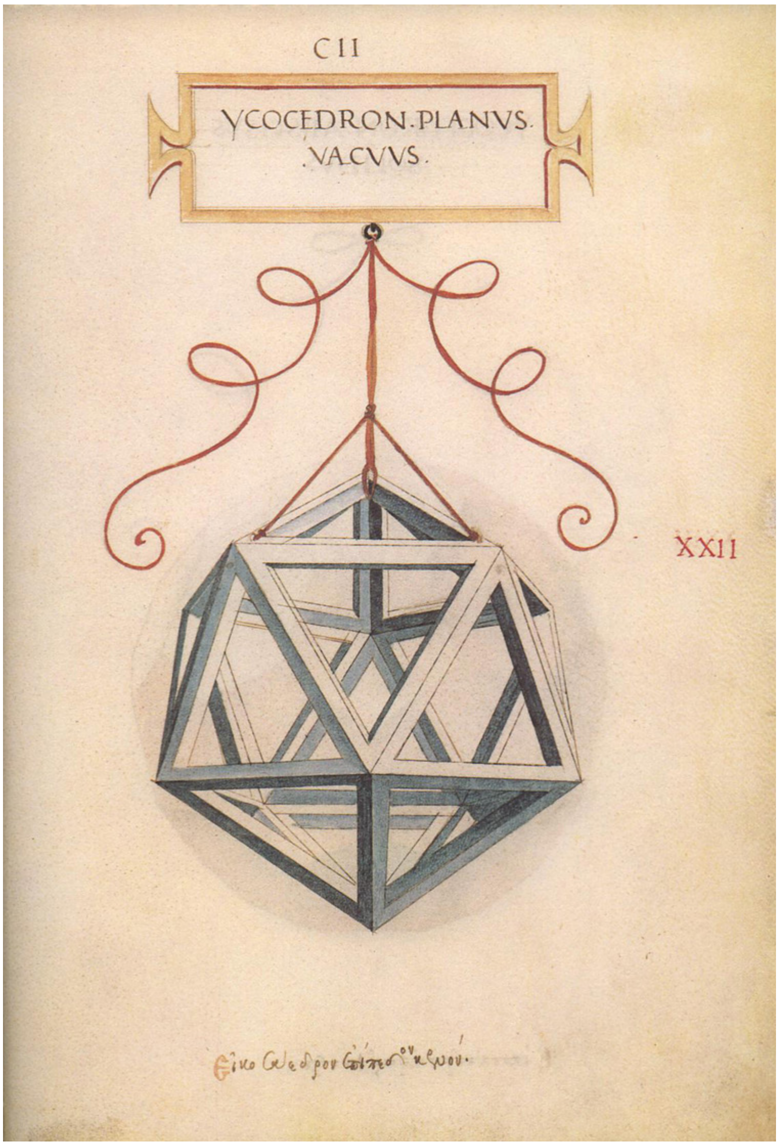


Fig. 16 – Luca Pacioli, *Compendium de divina proportione*, Icosaedro vacuo (Bibl. Ambrosiana di Milano)

Quale che sia il procedimento usato da Leonardo per disegnarle occorre tuttavia ricordare che lo scopo delle tavole della *Divina proportione* non è quello di fornire figure adatte ad illustrare dimostrazioni geometriche ma quello di rendere visibili forme materiali di oggetti matematici astratti. Il risultato complessivo è un ibrido tra matematica e arte, frutto dell'incontro tra la cultura dei dotti e quella dei tecnici.

Nel dicembre del '98 Pacioli termina l'opera sulla divina proporzione e la dedica a Ludovico il Moro, offrendola come dono per la celebre biblioteca Visconteo-Sforzesca «de innumerevole moltitudine di volumi in ogni facoltà et doctrina adorna». Di fronte all'incalzare degli eventi politici e militari - il Sansovino è stato sconfitto da Trivulzio - e alla previsione di una definitiva caduta del Moro, Leonardo e Pacioli abbandonano Milano. Pacioli e Leonardo si dirigono verso Mantova.

10 - A Mantova, a Firenze, a Bologna

A Mantova il mecenatismo di Isabella d'Este era improntato alla cosituzione di una pinacoteca che raccogliesse i migliori risultati della produzione pittorica d'avanguardia. La munificenza dei Gonzaga, tuttavia, investiva anche altri ambiti culturali che spaziavano dalla letteratura alle arti figurative, dalle scienze alla musica.

In tale ambiente fecondo di intersezioni di svariati campi del sapere Pacioli compose il *De ludo scachorum*, chiamato *Schifanoia* proprio perché il gioco degli scacchi costituiva uno dei passatempo preferiti degli uomini di corte del Quattrocento italiano. Dalla doumentazione d'archivio che abbiamo a disposizione non possiamo stabilire con certezza se Leonardo e Pacioli abbiano soggiornato contemporaneamente a Mantova, alla corte dei Gonzaga, e quindi non è possibile stabilire la data di composizione del libro sugli scacchi scritto da Pacioli per Isabella d'Este. Certo è comunque che frate Luca soggiornò per qualche tempo a Mantova. Già nell'autunno del 1500 tuttavia è a Firenze.

Come risulta dalle *Historiae Academiae Pisanae*, pubblicate da Angelo Fabroni, Pacioli è impegnato ad insegnare matematica all'Università di Pisa dal 1500 al 1505, e questo incarico, che peraltro si svolge nella sede fiorentina, non gli impedisce di continuare il suo sodalizio intellettuale con Leonardo da Vinci, che - se si eccettua un viaggio a Roma - risiede a Firenze dall'aprile del 1500 al maggio del 1506. Di questa ripresa del rapporto didattico fra l'artista vinciano e il matematico di Sansepolcro sono testimoni alcuni taccuini di Leonardo datati negli anni fiorentini (1500-1506). E a queste lezioni è connessa probabilmente la traduzione in volgare di Euclide, alla quale frate Luca accenna nel *De viribus quantitatis,* quando afferma di aver "posta già la extrema mano con la egregia, per noi similmente, traductione de latino in vulgare de verbo ad verbum del maximo Monarcha dele Mathematici discipline megarense Euclide".

La versione volgare dell'opera del "monarcha dele mathematici discipline" era stata incentivata molto verosimilmente dalla collaborazione con il "principe oggi fra i mortali" della pittura, Leonardo da Vinci. Il pittore, che ai ff.104v-138v del Madrid II ricopiò in elegante scrittura la traduzione volgare delle prime pagine degli *Elementi,* possedeva, peraltro, come si evince da un elenco di opere citate nel codice di Madrid 8936, i primi tre libri, e non è escluso che l' «Euclide volgare» di Leonardo fosse opera del suo maestro di matematica, che lo aveva introdotto allo studio degli *Elementi*.

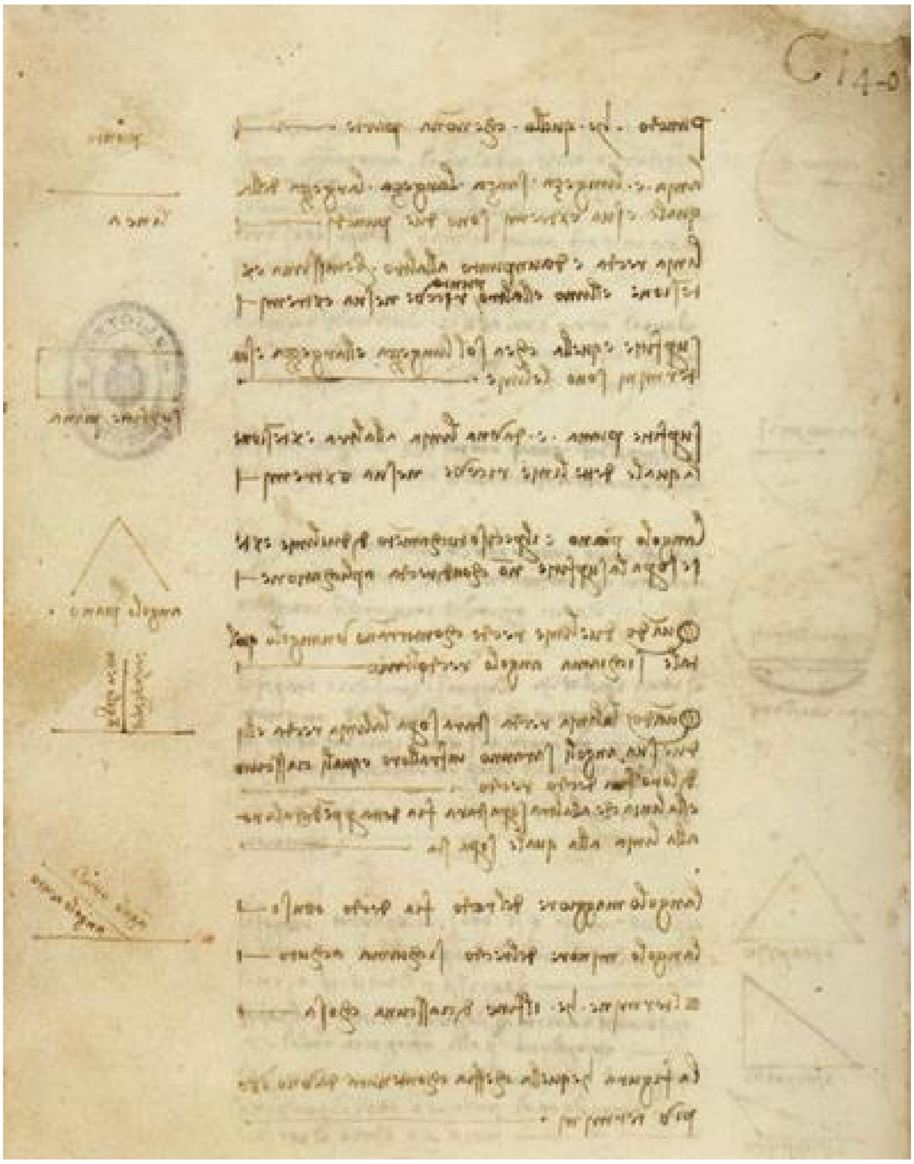


Fig. 17 - Leonardo da Vinci, Codice Madrid II, F.140v.
Traduzione in volgare dell'inizio del libro I degli Elementi di Euclide

Il codice Forster I si compone di due quaderni distinti, l'uno di 40, l'altro di 15 fogli. Nel primo "principiato da me Leonardo da Vinci addì 12 luglio 1505", come si legge nel verso del foglio 40, è contenuto il "Libro titolato de strasformazione, cioè d'un corpo 'n un altro sanza diminuzione o accrescimento di matera". Leonardo, che nel 1505 è ancora in contatto diretto con Pacioli, si spinge oltre l'insegnamento del maestro e sulla scia di Euclide enuncia, e poi dimostra in tre libri, le proposizioni inerenti alla trasformazione delle figure piane in altre equivalenti e poi, a partire dal foglio 35 recto di quelle solide. Il pittore, in seguito all'insegnamento del frate suo amico, ormai sembra padroneggiare lo stile euclideo e dà luogo ad una "geometria" costituita da una successione di proposizioni paragonabili ad un edificio in cui ogni elemento sovrastante si fonda su una consolidata base già precedentemente costruita con logica deduttiva.

Temi pacioliani si intravedono anche nella scelta dei problemi da risolvere, come nel caso della trasformazione di un dodecaedro in un cubo. Leonardo scompone il dodecaedro prima in 12 piramidi a base pentagonale, ciascuna delle quali viene poi divisa in 5 piramidi a base triangolare. Ogni piramide a base triangolare viene poi trasformata in un parallelepipedo, che moltiplicato per 60 forma quella che il vinciano definisce "stecca". Quest'ultima, infine, viene trasformata in un cubo di volume equivalente al dodecaedro.

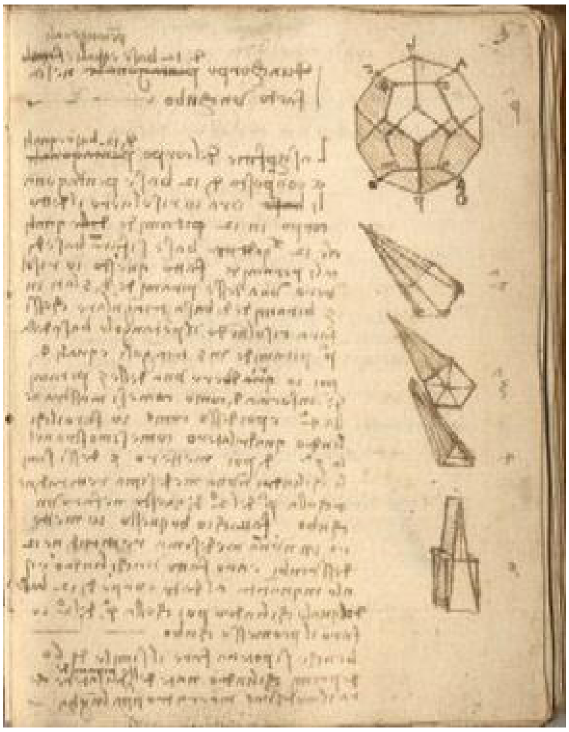


Fig. 18 - Leonardo, *Codice Forster I*, Londra, Victoria and Albert Museum, f. 7r.

Nella Firenze di inizio secolo, in cui si trovarono ad operare Pacioli e Leonardo, ancora non si era spento il ricordo della predicazione di Savonarola, arso sul rogo nel 1498.

Il governo repubblicano del Gonfaloniere Soderini viveva un periodo felice che da un punto di vista artistico vede la presenza simultanea a Firenze di Leonardo, Michelangelo e Raffaello. Pacioli è immerso in una società in fermento, dove lo splendore delle arti sembra nascondere la drammatica situazione politica in cui versa la Repubblica insieme agli altri stati italiani. Le continue lotte per il predominio nella penisola, che vedono contrapposto il papa Giulio II prima a Venezia e poi a Luigi XII, inaugurano un cinquantennio nel quale l'Italia diviene il campo di battaglia tra le due superpotenze europee: la Spagna e la Francia.

La Repubblica di Soderini è in balia delle decisioni politiche di altri governanti; ciò nondimeno il mecenatismo finalizzato all'esaltazione di Firenze non manca. La commissione simultanea a Leonardo e Michelangelo per gli affreschi nella Sala del Gran Consiglio ispirati alla storia fiorentina (la *Battaglia di Anghiari* a Leonardo e la *Battaglia di Cascina* a Michelangelo) ne costituisce l'esempio più evidente. Il mecenatismo di Soderini è tuttavia esteso anche agli altri campi del sapere. Lo stesso Pacioli il 30 agosto del 1502 riceve un compenso di 52 lire per i vari corpi regolari da lui donati alla Signoria di Firenze e inaugura un sodalizio duraturo con il Gonfaloniere Soderini.

In questo periodo gli interessi di Pacioli riguardano prevalentemente gli ultimi libri degli *Elementi* di Euclide. Sono questi gli anni nei quali infatti il frate prepara l'edizione latina della maggiore opera di geometria, pubblicata presso Paganino Paganini nel 1509.

Gli impegni di Luca non si limitano tuttavia all'insegnamento ma riguardano anche la sua attività di frate conventuale, nominato, nel 1504 a Troyes dal Comizio Generale dell'Ordine, Superiore di alcuni conventi della Romania. La carica, puramente onorifica, non intacca gli impegni accademici di Pacioli, che nel 1505 viene accettato ufficialmente come membro del convento francescano di Santa Croce a Firenze.

11 - Pacioli e Dürer

Dopo la partenza di Leonardo, chiamato a Milano dal governatore Charles d'Amboise, Pacioli lascia Firenze. Alcuni biografi suppongono che il frate durante il 1506 fosse a Bologna ad insegnare matematica. Nei Rotuli dell'Università Maestro Luca figura tra i professori di matematica dell'anno accademico 1501-1502 ma, visto il contemporaneo impegno accademico presso l'Università di Firenze, è presumibile che Pacioli abbia onorato il suo impegno con l'ateneo bolognese soltanto nel 1506. Nello stesso anno Dürer si trasferisce a Bologna per essere iniziato alla «secretissima scientia» della quale parla l'artista tedesco nella lettera a Pirkheimer del 13 ottobre 1506 nella quale dichiarava di volersi recare a "Bologna per amore dell'arte segreta della prospettiva che qualcuno è disposto a insegnarmi".

Questo qualcuno potrebbe essere proprio Pacioli. Molti indizi biografici e, soprattutto, il contenuto dei trattati di Dürer lasciano pensare che il frate di Sansepolcro possa aver insegnato al pittore tedesco sia i rudimenti della prospettiva, in base al *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca, sia la geometria euclidea dei solidi regolari, che tanta parte riveste nella produzione teorica di Dürer dopo il suo secondo viaggio in Italia. Non esistono prove documentarie che Pacioli sia stato a Bologna nell'ottobre del 1506. Ciò nonostante gli indizi sull'identità dell'ignoto insegnante di prospettiva convergono verso la figura del matematico di Sansepolcro.

Uno dei dubbi sollevati dagli storici sull'identificazione del maestro di Dürer con Pacioli è il fatto che il pittore dichiara di volersi recare a cavallo a Bologna per "amore dell'arte segreta della prospettiva" e non per amore della matematica *tout court.* Occorre rilevare tuttavia che frate Luca era sicuramente in grado di padroneggiare gli elementi della prospettiva pierfrancescana; tanto è vero che nel suo *Trattato di architettura* dichiara ai suoi concittadini di avere preparato un compendio del *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca ad uso didattico.

"E anco con quella prometto darve piena notitia de perspectiva medianti li documenti del nostro conterraneo e contemporale di tal facultà ali tempi nostri monarcha Maestro Petro de Franceschi, dela qual già feci dignissimo compendio e per noi ben appreso".

Pacioli quindi doveva possedere una copia del *De prospectiva pingendi* del suo conterraneo Piero della Francesca ed era sicuramente in grado di insegnare i principi della prospettiva a Dürer visto che aveva realizzato un "dignissimo compendio" dell'opera pierfrancescana, e nella seconda parte della *Summa* (c. 65r) aveva illustrato e risolto tre problemi di *prospectiva artificialis* chiaramente riconducibili al trattato del suo conterraneo. È lo stesso frate Luca, del resto, che in un passo della *Summa* (*Summa,* c. 68v), nel lodare Piero della Francesca riferisce di aver studiato e assimilato il *De prospectiva pingendi*:

"Se tu ben discorri in tutte l'arti: tu troverai la proportione de tutte esser madre e regina e senza lei niuna poterse exercitare. Questo el prova prospectiva in sue picture... Del qual documento, a ciò ben s'abino a disponere, el sublime pictore (ali dì nostri anchor vivente) maestro Piero de li Franceschi, nostro conterraneo del Borgo San Sepolcro, hane in questi dì composto un degno libro de ditta Prospectiva; nel quale altamente de la pictura parla, ponendo sempre al suo dir ancora el modo e la figura del fare. El quale tutto habiamo lecto e discorso; el quale lui fece vulgare, e poi el famoso Oratore, poeta, e rethorico, greco e latino (suo assiduo consotio e similmente conterraneo) maestro Matteo lo reccò a lengua latina ornatissimamente, de verbo ad verbum, con exquisiti vocabuli. Nela quale opera de le 10 parole le 9 recercano la proportione. E così con instrumenti li insegna proportionare piani e figure: con quanta facilità mai si possa".

Lo stesso interesse per i poliedri regolari da parte di Dürer risale al tempo del suo secondo viaggio in Italia. Il pittore comincerà ad interessarsi di geometria soltanto dopo il 1506 e l'anno successivo acquisterà una copia degli *Elementi* di Euclide nell'edizione veneziana di Zamberti del 1505. C'è da supporre quindi che a suscitare l'interesse in Dürer per la geometria euclidea sia stato il maggior divulgatore degli *Elementi* del primo Rinascimento, e cioè fra' Luca dal Borgo. L'opera matematica dell'artista tedesco, *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt (Ammaestramenti sulla misurazione col compasso e la squadra nelle linee, nei piani e nei corpi interi),* si configura, del resto, come manuale di geometria pratica ad uso dei tecnici; quindi come trattato in volgare tedesco sui principi contenuti negli *Elementi.*

Il volume a stampa sulla misurazione con riga e compasso (*Underweysung der Messung*), pubblicato a Norimberga nel 1525, si divide in quattro libri, nei quali a vari livelli è riscontrabile l'insegnamento di Piero della Francesca. Ora, siccome il *De prospectiva pingendi* era fruibile soltanto attraverso poche copie manoscritte, è verosimile che il metodo della "costruzione legittima", illustrato nell'*Underweysung der Messung,* e le altre tracce dell'opera pierfrancescana presenti nel trattato di Dürer siano pervenute a conoscenza del pittore tedesco proprio grazie all'insegnamento di Luca Pacioli. Le impronte più evidenti lasciate dal frate di Sansepolcro nell'opera teorica di Dürer si trovano nel terzo e nel quarto libro dell' *Underweysung der Messung*, dove compare sia il metodo per costruire le *litterae antiquae* maiuscole con riga e compasso - alla maniera dell'edizione veneziana della *Divina proportione* (1509) - sia la trattazione dei poliedri regolari e archimedei.

Il quarto libro dell'*Underweysung der Messung* si apre infatti con i solidi platonici, che Dürer presenta come oggetti ricavabili, al pari delle lettere maiuscole dell'alfabeto, mediante riga e compasso. La trattazione matematica riservata ai solidi geometrici è analoga a quella contenuta nella terza parte della *Divina proportione (cap. 48-62).*

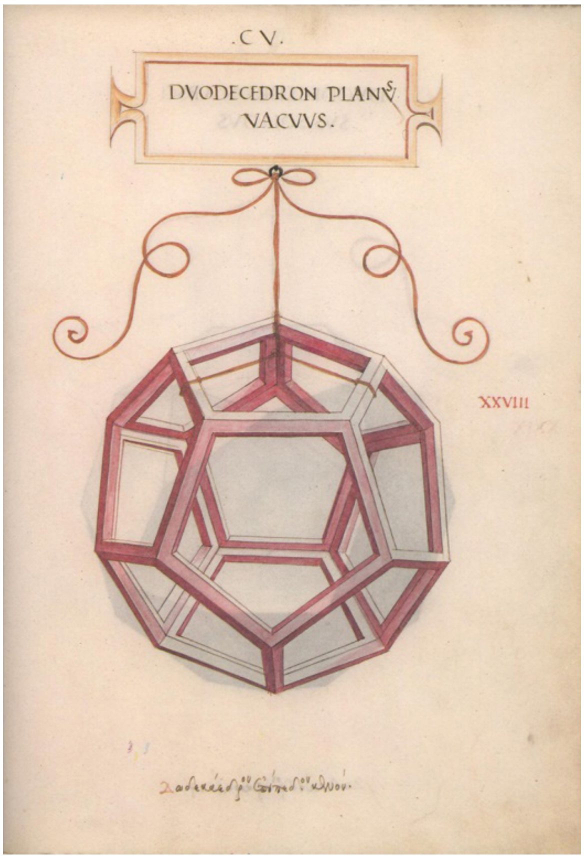


Fig. 19 - L. Pacioli: El duodecedron piano solido over vacuo ha 30 linee equali over lati, quali in lui causano 60 anguli superficiali, e ha 20 anguli solidi, e ha 12 basi over superficie che lo contengono. E queste sonno tutte pentagone, de lati e anguli fra loro tutti equali, como appare in sua forma (*Compendium de divina proportione*, cap. 52, c. LVIr)

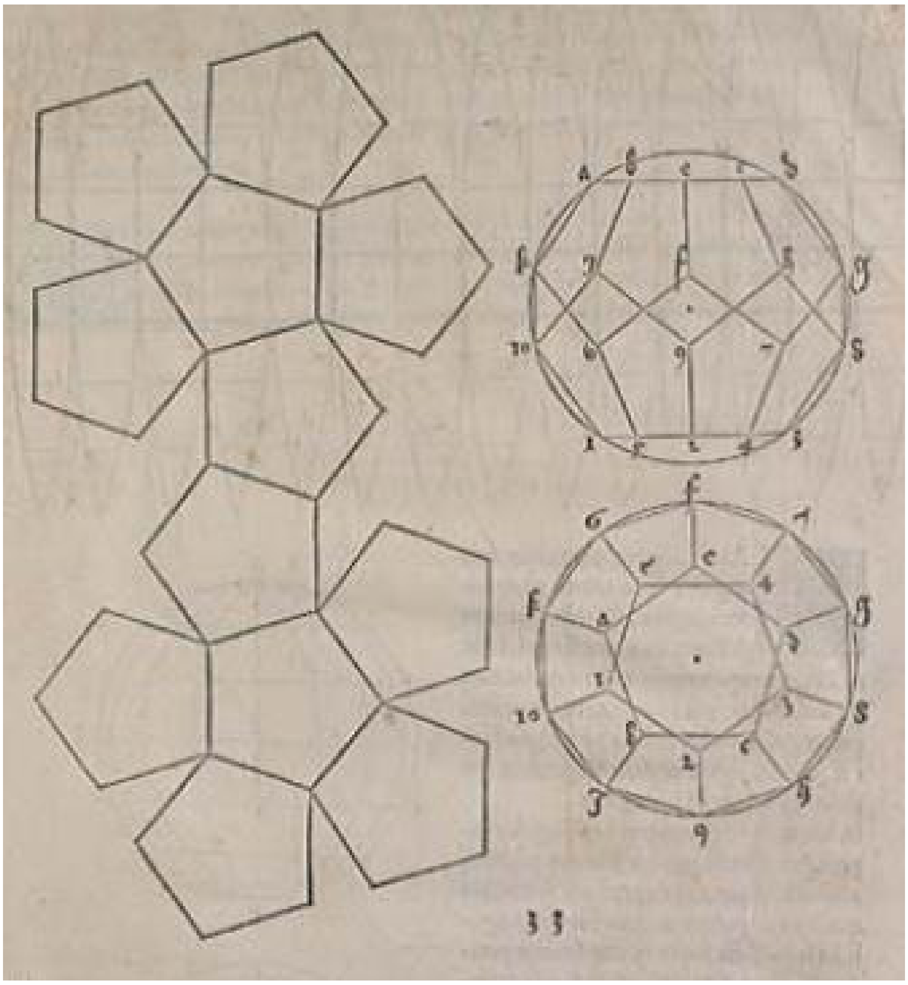


Fig. 20 - A. Dürer: Quintum corpus fit omnibus suis superficiebus pentagonis & est duodecim planarum, pentagonarum & viginti aequorum triangulorum angulorum, et triginta acutorum laterum, quemadmodum illud expansum, deinde compactum *(Underweysung der messung,* ed. lat. Camerarius, 1532, p. 146-7)

Nella rappresentazione dei poliedri regolari, corpi matematici intrisi di significati filosofici connessi alla cosmogonia platonica del *Timeo,* il pittore di Norimberga elabora un metodo grafico innovativo per sviluppare la loro superficie su un piano e consentire mediante carta e forbici di costruire un perfetto esempio tridimensionale dei solidi. Per ciascuno dei 5 corpi regolari Dürer disegna, infatti, prima la pianta e il prospetto e poi sviluppa *a latere* la "rete" di figure piane che compongono il corpo regolare. Con questa tecnica grafica tutte le superfici di base sono disegnate su uno stesso piano, in modo da poterle ritagliare con le forbici e ricomporle in forma solida.

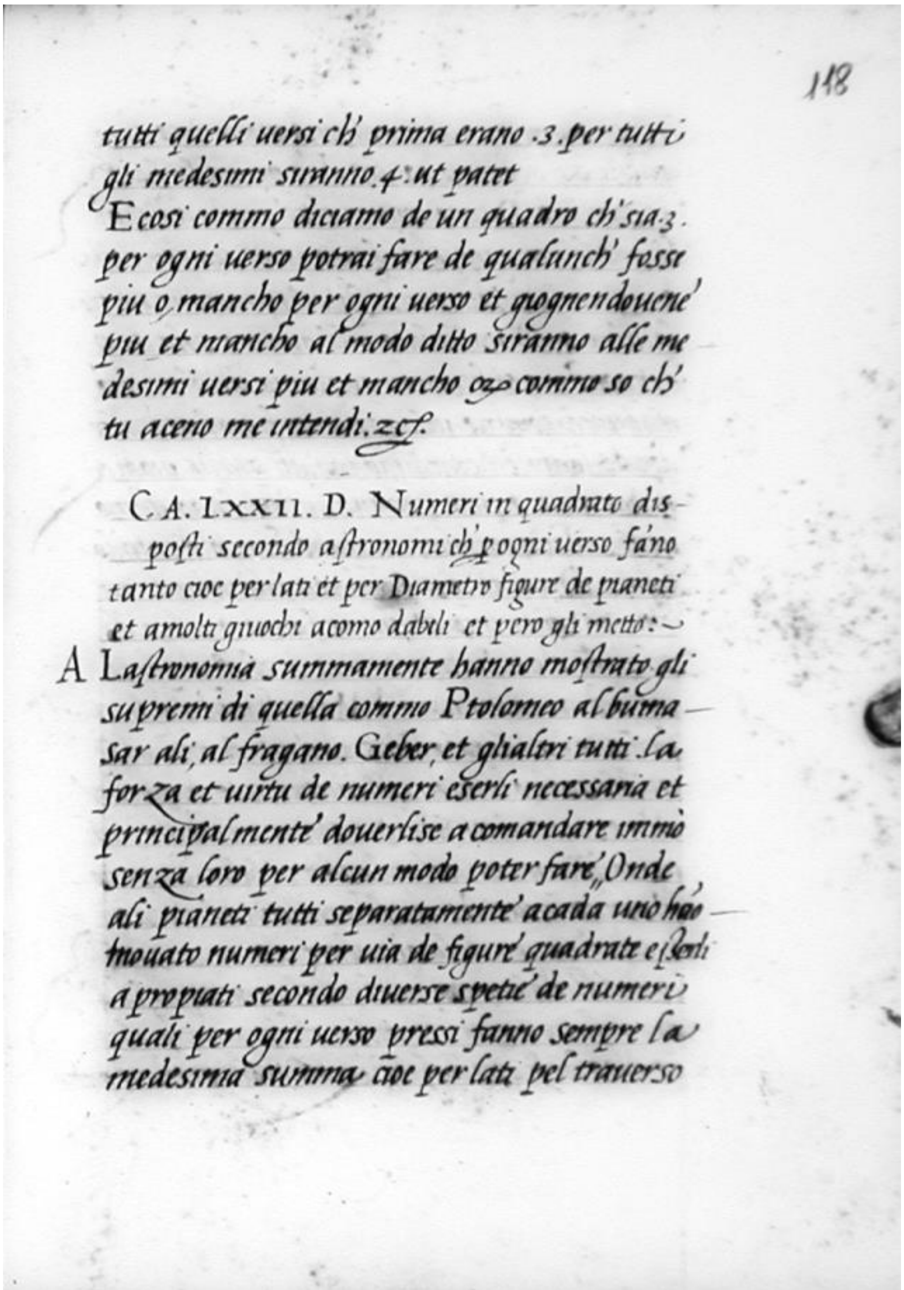
La favola cosmologica del *Timeo,* in cui si racconta la costruzione dei cinque elementi (aria, acqua, terra fuoco, etere) da parte del Demiurgo mediante la geometria dei poliedri, dall'iperuranio culturale dei matematici e dei filosofi si incarna così in manufatti materiali realizzati con forbici, carta e colla, che rendono visibili i 5 poliedri regolari all'occhio della fronte oltre che all'occhio della mente.

Il metodo della spiegatura di Dürer e l'uso di ritagliare le facce del poliedro con carta e forbici è presente nell'opera di Pacioli. Nel *De viribus quantitatis*, al documento XLI, nella sezione geometrica (cc. 158v-160r), dopo aver insegnato a dividere un segmento *ab* in modo da costruire con le sue parti la "divina proporzione", frate Luca invita il lettore a verificarlo sperimentalmente. "E la experientia anchora con carta, forbici e peso tagliando, l'una superficie troverai a l'altra eguagliarse, e così farai sempre".

Un altro indizio dell'influenza e forse dell'incontro fra il matematico di Sansepolcro e l'artista tedesco è rappresentato dalla celebre incisione di *Melancholia I,* che raffigura un quadrato magico sopra la testa dell'angelo e un enigmatico poliedro in prospettiva, a sinistra dell'incisione.

Nel *De viribus quantitatis* il frate di Sansepolcro accenna alle proprietà dei quadrati magici in relazione alle influenze planetarie.

Il quesito LXXII del libro sui giochi matematici di Luca dal Borgo è, infatti, intitolato: "Numeri in quadrato disposti secondo astronomi che per ogni verso fanno tanto, cioè per lati et per Diametro: figure de' pianeti et a molti giuochi acomodabili et però gli metto".



118

tutti quelli uersi ch' prima erano .3. per tutti
gli medesimi siranno .4. ut patet
E cosi commo diciamo de un quadro ch' sia .3.
per ogni uerso potrai fare de qualunch' fosse
piu o mancho per ogni uerso et giognendouene
piu et mancho al modo ditto siranno alle me
desimi uersi piu et mancho etc. commo so ch'
tu aceno me intendi: zcf.

CA. LXXII. D. Numeri in quadrato dis-
posti secondo astronomi ch' p ogni uerso fano
tanto cioe per lati et per Diametro figure de pianeti
et amolti giuochi acomo dabeli et pero gli metto:
A Lastronomia summamente hanno mostrato gli
supremi di quella commo Ptolomeo al bumasar ali, al fragano. Geber, et glialtri tutti la
forza et uirtu de numeri eserli necessaria et
principalmente douerlise a comandare immo
senza loro per alcun modo poter fare. Onde
ali pianeti tutti separatamente acada uno hano
trouato numeri per uia de figure quadrate eserli
apropiati secondo diuerse spetie de numeri
quali per ogni uerso pressi fanno sempre la
medesima summa cioe per lati pel trauerso

Fig. 21 – Luca Pacioli, *De viribus quantitatis*, quesito LXXII, Giochi matematici

> "A l'astronomia summamente - scrive Pacioli - hanno mostrato gli supremi di quella, commo Ptolomeo, Albumasar, Ali, Alfragano, Geber et gli altri tutti, la forza e virtù de' numeri esserli necessaria et principalmente doverlise acomodare immo senza loro per alcun modo poter fare. Onde a li pianeti tutti separatamente a cadauno hanno trovato numeri per via de figure quadrate esserli appropriati secondo diverse spetie de numeri quali per ogni verso pressi fanno sempre la medesima somma".

L'impiego dei quadrati magici in ambito astrologico risale almeno al IX secolo, ed è connesso proprio all'astronomia araba, della quale Pacioli cita alcuni esponenti. Nella tradizione manoscritta occidentale talvolta se ne scorge qualche traccia; come nel codice bolognese della seconda metà del XIV secolo (Bibl.Univ. 2433, ff. 20v-21r) che contiene i quadrati magici del Sole e della Luna, o il Vat. Rel .lat. 1283, del secolo XIII, che presenta il quadrato magico di Marte.

È nel *De viribus quantitatis* di Pacioli, che tuttavia essi vengono esplicitamente associati all'astronomia astrologica. Un quadrato magico è tale che la somma di una riga di una colonna o di una diagonale dà sempre lo stesso numero. Pacioli, sulla scia dell'astronomia araba, costruisce i quadrati magici dei pianeti, ognuno dei quali corrisponde a un numero che indica le case delle quali è composto il quadrato: 9 per Saturno; 16 per Giove; 25 per Marte; 36 per il Sole; 49 per Venere; 64 per Mercurio; 81 per la Luna.

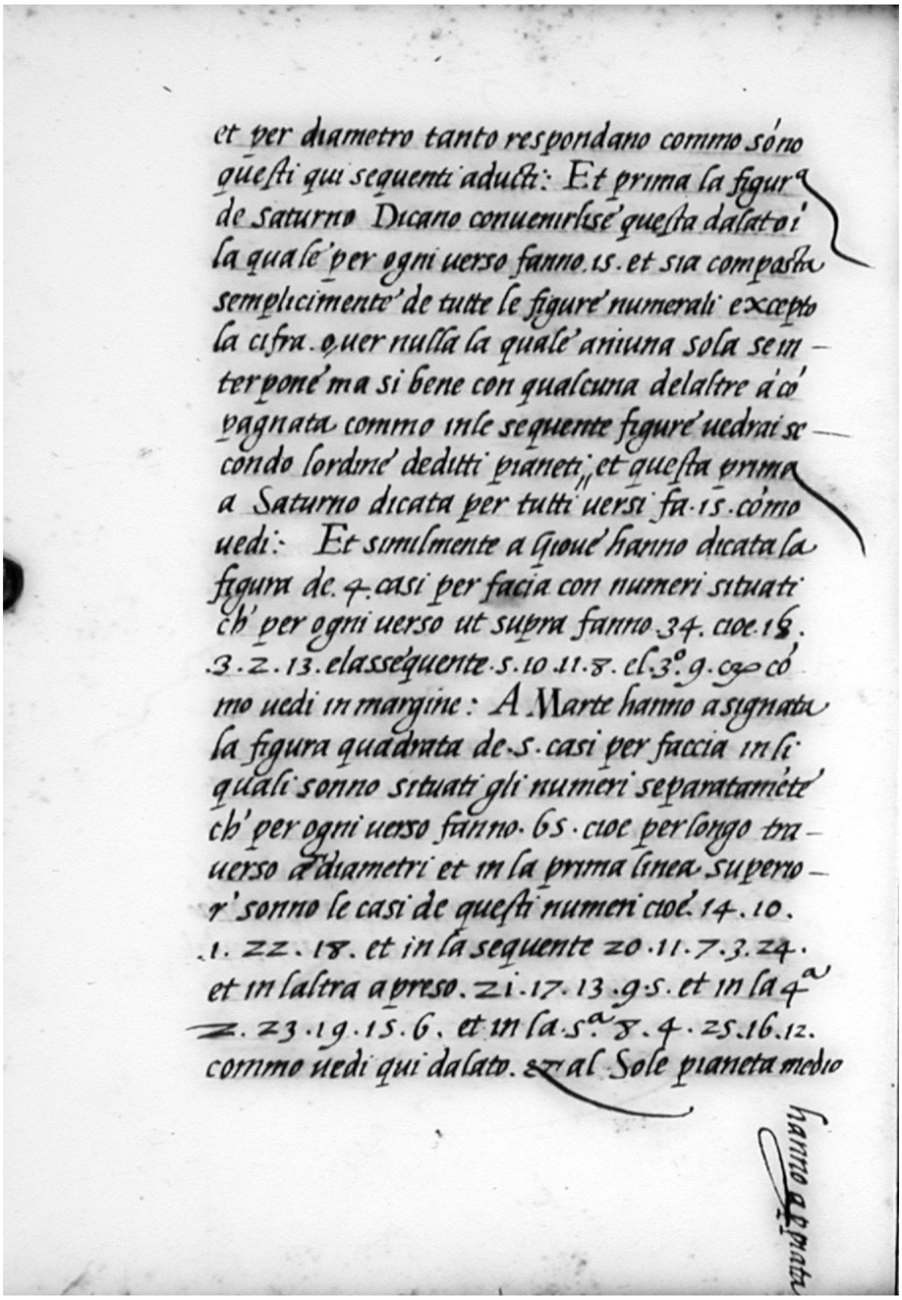

et per diametro tanto respondano commo sono
questi qui sequenti adutti: Et prima la figura
de Saturno Dicano conuenirlise questa dalato i
la quale per ogni uerso fanno.15. et sia composta
semplicimente de tutte le figure numerali excepto
la cifra. o uer nulla la quale aniuna sola se in-
terpone ma si bene con qualcuna delaltre acō-
pagnata commo inle sequente figure uedrai se-
condo lordine dedutti pianeti, et questa prima
a Saturno dicata per tutti uersi fa.15. como
uedi: Et similmente a Gioue hanno dicata la
figura de.4.casi per facia con numeri situati
ch' per ogni uerso ut supra fanno.34. cioe.16.
3.2.13. elasseguente.5.10.11.8. el.3°.9.6.7.12 cō-
mo uedi in margine: A Marte hanno asignata
la figura quadrata de.5.casi per faccia in li
quali sonno situati gli numeri separatamēte
ch' per ogni uerso fanno.65. cioe per longo tra-
uerso e diametri et in la prima linea supero-
r' sonno le casi de questi numeri cioe.14.10.
1.22.18. et in la sequente 20.11.7.3.24.
et in laltra apreso.21.17.13.9.5. et in la 4a
2.23.19.15.6. et in la 5a 8.4.25.16.12.
commo uedi qui dalato. Et al Sole pianeta medio
hanno asignata

Fig. 22 – Luca Pacioli, *De viribus quantitatis,* quadrati magici

Ciascun quadrato ha un suo numero magico dato dalla somma di ciascuna riga, che è pari peraltro alla somma di ciascuna colonna e diagonale. Pacioli indica pertanto le seguenti costanti magiche: 15 per Saturno, 34 per Giove, 63 per Marte, 111 per il Sole, 175 per Venere, 260 per Mercurio, 369 per la Luna.

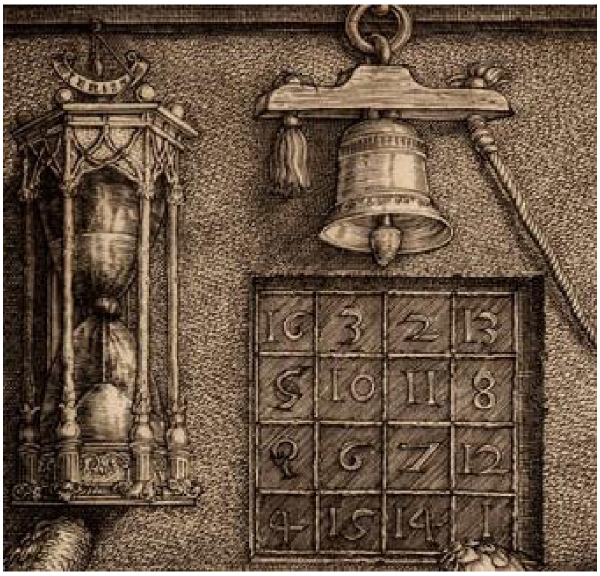
Durante il Rinascimento i quadrati magici cominciano a comparire anche nei trattati di giochi matematici, ma prima del *De viribus quantitatis* non si ha, allo stato attuale degli studi, notizia del loro uso in ambito abachistico.

Albrecht Dürer, in *Melencolia 1* (1514), inserisce proprio un quadrato magico, al di sopra della testa dell'angelo che simboleggia la melanconia.

Fig. 23- Albrecht Dürer, *Melencolia 1* (1514)

Il quadrato è sormontato da una campana ed ha vicino una clessidra. A sinistra della clessidra, sulla parete scorciata dell'edificio sul quale è scolpito il quadrato c'è una bilancia a due piatti che pende sulla testa di un bimbo intento a leggere un libro. A coprire parzialmente il paesaggio marino c'è appunto il poliedro del quale si parlava, formato da 6 pentagoni irregolari e 2 triangoli equilateri, ai cui piedi giace accovacciato un cane.

L'angelo, con in mano il sesto e ai piedi una riga, fissa attonito l'orizzonte con la testa pigramente adagiata sulla mano sinistra. Intorno alle sue vesti il pavimento è cosparso di oggetti simbolici: una sfera, un coltello a sega, una tavola, dei chiodi ecc. Il quadrato magico costituisce il tramite fra i pianeti e gli umori degli uomini. Quello inciso da Dürer solitamente è denominato *mensula Jovis* ed è tale che la somma dei numeri in riga, in colonna o in diagonale è sempre 34.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figg. 24a/b - Albrecht Dürer, *Melencolia 1*, particolari

Il significato della *mensula Jovis* nell'incisione di Dürer è da ricondurre alla tradizione ermetica rinascimentale inaugurata da Ficino e proseguita da Cornelio Agrippa di Nettesheim. L'immagine aritmetica di Giove, in questo caso, è una sorta di talismano che avrebbe la funzione di catturare l'influsso benefico di Saturno e favorire il divino furore causato dalla *candida bile* rappresentata dall' *humor melancolicus*. Il quadrato magico di Giove, ciononostante, non è riconducibile alle fonti filosofiche di Dürer, in quanto non è presente né nel *De vita* di Ficino né nella versione manoscritta del *De occulta philosophia* di Agrippa che risale al 1510.

Nonostante l'esistenza di altri manoscritti latini inerenti ai trattati magici, la fonte più prossima a Dürer pare essere proprio il *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli. Il quadrato magico di *Melencolia I* costituisce, insieme al suggestivo poliedro (che potrebbe essere un cubo tronco in prospettiva, ottenuto col metodo del taglio a metà degli spigoli), un suggestivo legame dell'artista di Norimberga con Pacioli e con Bologna. Gli indizi di un incontro fra Dürer e frate Luca, del resto, sono straordinariamente numerosi e convergenti per rappresentare delle mere coincidenze. Certamente tutti o almeno alcuni di questi indizi di un incontro bolognese fra il matematico di Sansepolcro e il pittore di Norimberga potrebbero essere smontati da successive e documentate indagini sulle fonti usate da Dürer per conoscere da vicino il *De prospectiva pingendi* di Piero, per costruire le lettere dell'alfabeto con riga e compasso, per disegnare i poliedri regolari e semiregolari con forbici e carta, e per costruire quadrati magici. Ciò che comunque accomuna Dürer e Pacioli resta, oltre che il contenuto delle opere, soprattutto lo stile matematico con il quale entrambi si rivolgono a quello strato culturale intermedio fra dotti ed analfabeti che era desideroso di matematizzare le arti e le tecniche ricorrendo alla geometria degli *Elementi* di Euclide. Nel creare un nuovo stile matematico per artisti e "pratici vulgari" Dürer e Pacioli contribuiscono, ciascuno in base alle sue competenze, a costruire il ponte fra matematica e tecnica che aprirà ai moderni il passaggio verso la nuova scienza.

12 - La stampa della «Divina proportione»

Nel 1508 Pacioli è di nuovo a Venezia per curare la stampa della *Divina proportione*, e nell'occasione del ritorno nella città lagunare l'ormai celebre matematico viene invitato a tenere un corso di lezioni su Euclide. La prolusione del corso di geometria, avvenuta l'11 agosto del 1508 nella chiesa di S. Bartolomeo in Rialto, presenta le caratteristiche del pensiero di Pacioli relativo al concetto di proporzione. Come nella epistola dedicatoria della *Summa* e nel proemio della *Divina proportione*, il frate ribadisce, di fronte ad una platea composta dall'élite culturale e patrizia di Venezia, l'universalità dell'applicazione matematica, soffermandosi in particolare sulle implicazioni filosofiche e teologiche del concetto di proporzione. Il pubblico infatti è formato da teologi, filosofi, medici e poeti, che Pacioli accuratamente elenca, mostrando così la sua familiarità con l'ambiente veneziano.

L'attività del frate non si limita però all'insegnamento. Pacioli è impegnato anche nell'edizione di due opere: gli *Elementi* di Euclide, dedicati al cardinale Francesco Soderini, e la *Divina proportione*, dedicata al gonfaloniere fiorentino Pietro Soderini. L'edizione del 1509 di quest'opera è aperta da un sonetto di Daniele Caetani, seguito da una lettera di presentazione del libro di Pacioli al patrizio veneto Andrea Mocenigo, grande cultore e amante delle discipline matematiche. La stampa della *Divina proportione* è seguita personalmente da frate Luca che in quella edizione inserisce anche le tavole con la costruzione delle lettere dell'alfabeto secondo uno stile epigrafico classico, ben noto a Venezia e a Padova alla scuola di Mantegna e Felice Feliciano.

A questo proposito la *Divina proportione*, con il solo antecedente di Da Moile, è il primo trattato a stampa in cui si elabora matematicamente un sistema scrittorio calligrafico. In collaborazione con Paganino Paganini, Pacioli realizza un'edizione splendida, degna del confronto con le aldine. Sono in particolare gli elegantissimi caratteri di Alessandro Paganini, elogiati dallo stesso frate, a costituire il motivo di novità tipografica dell'opera.

L'opera a stampa del 1509 è la fonte principale dalla quale dilaga nel XVI secolo la passione per lo studio e la realizzazione di poliedri. Dell'ampia diffusione del genere dei poliedri nell'arte e nella geometria sono testimoni: le tarsie lignee di Fra' Giovanni da Verona nel Coro di Santa Maria in Organo a Verona e a Monteoliveto Maggiore (presso Siena); l'opera teorica di Dürer e dei suoi seguaci di Norimberga (Jamnitzer e Lenker); il trattato su *La practica della perspettiva (*1556) di Daniele Barbaro; gli scritti matematici di Tartaglia e Bombelli; il *Mysterium cosmograhicum* (1596), di Kepler, che sulla base dei poliedri regolari costruisce l'architettura geometrica del cosmo copernicano; gli orologi poliedrici di Stefano Bonsignori.

L'edizione veneziana del 1509, del resto, si configura come una celebrazione della *Divina proportione* realizzata con due linguaggi: quello scritto e quello grafico. Nella parte scritta del volume compaiono tre testi: il *Compendium de divina proportione* (cc. 1r-22v), il *Tractato de l'architectura* (cc. 23r-35v) e la versione volgare del *Libellus de quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca (cc. 1-27 della seconda parte). La preziosa parte grafica, invece, comprende le 59 tavole dei poliedri "regulari" e "dependenti" che illustrano il *Compendium de divina proportione,* le tavole del trattato di architettura e le incisioni che illustrano la costruzione delle lettere maiuscole dell'alfabeto con riga e compasso.

La preziosità dell'edizione è testimoniata fra l'altro dalla richiesta al Senato veneto inoltrata da Pacioli il 14 dicembre del 1508 per il diritto d'autore ventennale sulla stampa di alcuni suoi lavori, tra i quali gli *Elementi* di Euclide, la *Divina proportione*, il *De viribus quantitatis*, il *De ludo scachorum dicto Schiphanoia*, la *Summa*.

13 - Tra Perugia, Sansepolcro e Roma.

Il 1509 è l'ultimo anno di Pacioli a Venezia. Dalla città lagunare il frate parte per recarsi di nuovo a Perugia dove è nominato professore nel novembre del 1510. Prima di ricoprire questo incarico tuttavia Pacioli è impegnato a sbrigare una faccenda nata in seguito ad aspre rimostranze dei frati del convento di San Francesco che stanno a Sansepolcro (dicembre 1509). Nell'archivio storico di Sansepolcro c'è una lettera indirizzata dal Magistrato del Borgo al Generale dei minori, nella quale fra' Luca viene descritto come la «vergogna» dell'ordine francescano. Il motivo del risentimento - come lascia intuire lo stesso magistrato - è l'uso di una «certa sua bolla, offitii e amministratione omnimodo la quale esso abbia ottenuto a summo pontefice» .

Ebbene, questo privilegio concesso a Pacioli da Giulio II, che il frate aveva avuto come protettore a Roma nel 1489 quando Giuliano della Rovere era ancora cardinale, consisteva nella facoltà di erogare con testamento 300 ducati larghi d'oro, di essere dispensato dal coro, dal cantar

Messa e da altre mansioni tipiche della regola dei minori. La lite si protrae per qualche tempo ma già nel 1510 frate Luca è nominato - come risulta da un documento dell'archivio generalizio dell'ordine - Commissario del convento francescano di Sansepolcro con la dispensa dall'intervenire nel coro e al refettorio e con facoltà di mangiare nella propria camera .

Tra il 1511 e il 1512 Pacioli è impegnato in alcune controversie che nascono con i confratelli di Sansepolcro. I contrasti si protraggono a causa dei privilegi di maestro Luca e coinvolgono addirittura il gonfaloniere Soderini, che non manca di manifestare il proprio favore a Pacioli "che noi et i nostri amiamo come homo de scientia et per lui ci affaticheremo [...] per beneficarlo in quello che fussi conveniente et a noi et a lui" .

Nel 1514 Pacioli è chiamato di nuovo a Roma ad insegnare matematica all'università. Nella città eterna, sotto il pontificato di Leone X (1513-1521) dei Medici, probabilmente si rincontra per l'ultima volta con il suo amico e "compatriota fiorentino" Leonardo da Vinci. La Roma che Luca Pacioli rivede dopo 25 anni ha un aspetto decisamente nuovo. Il disegno universalistico del papato di Giulio II (1503-1512) ha ispirato il grandioso progetto bramantesco di demolizione dell'antica basilica costantiniana per edificare un nuovo maestoso tempio della cristianità, simbolo della Chiesa trionfante e, nella sua pianta centrale, specchio della perfezione divina che risplende nell'ordine armonico dell'universo. L'ambizioso progetto di Bramante resta per il momento ancora soltanto sulla carta ma ormai l'immane impresa della fabbrica di San Pietro è avviata. Per commissione di Giulio II Michelangelo ha progettato un maestoso Monumento funerario che porterà a termine nella Chiesa di San Pietro in Vincoli molti anni dopo (1505-1545). Lo stesso Michelangelo, in seguito alle ripetute insistenze di Giulio II, ha affrescato la volta della Cappella Sistina (1508-1512), e Raffaello, sempre per iniziativa di Giuliano della Rovere, ha realizzato nel Palazzo Vaticano, la celebrazione pittorica della cultura umanistica negli affreschi della Stanza della Segnatura (1509-1511). Nella Roma di Leone X, frate Luca resta almeno fino al marzo del 1515 poiché a questa data la comunità di Sansepolcro si rivolge proprio a lui per ottenere dalla Sede Apostolica un'indulgenza per l'antica compagnia del Crocifisso. I rapporti con i confratelli e con i concittadini del Borgo sono decisamente migliorati. Pacioli, infatti, che aveva avuto in passato noie e vertenze giudiziarie, si è completamente riappacificato con i suoi confratelli (se concordaverunt et pacificaverunt) in seguito alla rinuncia (14 marzo 1516) ai privilegi che gli erano stati concessi da papa Giulio II . Il 15 aprile del 1517, addirittura, i minori conventuali di Sansepolcro scrivono al Commissario provinciale di Assisi, chiedendo il «Reverendo conterraneo Maestro Luca Pacioli per ministro di questa nostra provincia de Assisi per esser s.r.p. oltre a le sue copiose virtù e la condecente età a noi et a tucto questo nostro popolo sempre stato obsequentissimo, utile et benevolo. El che facendo v.r.p. con tutta la Religione ci harà più largamente parati ad omni suoi occurrentie». In una lettera della comunità di Sansepolcro al provinciale di Assisi, datata 20 ottobre 1517 si parla di Pacioli come della «bona memoria di maestro Luca». Il frate era deceduto qualche tempo prima, probabilmente a Sansepolcro tra il 15 aprile e il 6 luglio del 1571, data in cui un rogito del notaio Ser Uguccione Dolci fa riferimento ai beni "olim Reverendi Patris in sacra theologia...Magistri famosissimi Fratris Luce de Paciolis".

Il *necrologium* di Santa Croce a Firenze riporta la data della morte di Pacioli: 19 giugno 1517. Il documento contenuto nel necrologio di Santa Croce è di terza mano: si tratta, infatti, di un foglietto dattiloscritto incollato in fondo alla pagina del 19 giugno 1517 che registra la morte di altri tre frati francescani ed è una copia di un necrologio manoscritto perduto. Nel documento si legge: "S. Sepolcro- P.M. Luca Pacioli, per primo dette all'algebra linguaggio e struttura di scienza, dettò opere di matematica, consultato da Leonardo da Vinci, morì forse in patria a 70 anni". Di per se stesso non è una prova documentaria. Ciò nonostante esso è compatibile con le fonti archivistiche esaminate da Elisabetta Ulivi sia per quanto riguarda la morte che per quanto riguarda la nascita di Luca Pacioli.

Indicazioni bibliografiche

Baldi B., *Vite inedite di tre matematici*, in “Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche” (a cura di B. Boncompagni), 1879, ora in E. Nenci (a cura di), *Bernardino Baldi. Le vite de' matematici,* Milano, Franco Angeli, 1998.

Banker J.R., *Piero della Francesca e Luca Pacioli: Maestro e Alunno,* in *Luca Pacioli e i grandi artisti del Rinascimento italiano,* a cura di Matteo Martelli, Biblioteca del Centro Studi “Mario Pancrazi”, Umbertide, UB, 2016, pp. 44-40.

Boncompagni B., *Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Dank di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra' Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro)*, in «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche», 1879, pp. 352-438.

Ciocci A. , *Luca Pacioli tra Piero della Francesca e Leonardo,* Sansepolcro, Aboca Museum edizioni, 2009.

Ciocci A., *Luca Pacioli: letture e interpretazioni*, Biblioteca del Centro Studi “Mario Pancrazi”, Selci-Lama, L'Artistica, 2012.

Giusti E. e Martelli M. (a cura di), *Pacioli 500 anni dopo.* Atti del Convegno di Sansepolcro 22/23 maggio 2009*,* Selci-Lama, Tipografia L'Artistica, 2009.

Jayawardene S.A., *Towards a Biography of Luca Pacioli,* in E. Giusti (a cura di), *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento.* Atti del convegno internazionale di studi, Sansepolcro 13-16 aprile 1994, Città di Castello, Petruzzi 1998, pp. 19-28.

Marinoni A., *La matematica di Leonardo da Vinci,* Milano, 1982.

Nardi B., *La scuola di Rialto e l'Umanesimo veneziano,* in *Umanesimo europeo e umanesimo veneziano,* Firenze, Sansoni 1963.

Ulivi E., *Una biografia scientifica* in *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, a cura di C. Maccagni, e E. Giusti) Firenze, Giunti, 1994.

Ulivi E., *Documenti inediti su Luca Pacioli, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci, con alcuni autografi,* “Bollettino di storia delle Scienze Matematiche”, XXIX, 1, 2009.

Parte seconda
Le opere di Luca Pacioli.
Dalla contabilità alla filosofia della natura

Le notizie circa il numero e il tipo di scritti di Luca Pacioli sono reperibili in alcuni passi delle sue stesse opere. Nella *Summa*, ad esempio, si ha menzione di tre manuali di matematica composti prima dell'opera maggiore: 1)il trattato dedicato a "Ser Bartolomeo, Francesco e Paolo, fratelli Rompiasi" nel 1470; 2)l'opera scritta per i "gioveni de Peroscia", completata nel 1478; 3) e quella composta a Zara nel 1481 "de' casi più sutili e forti". Le informazioni sulle opere successive alla *Summa* sono contenute invece nella Supplica di Pacioli al Senato veneto (19 dicembre 1508) per la richiesta del diritto di stampa dei suoi libri:

> "Tutti li quindici libri de Euclyde, zoè Arithmetrica, Geometria, proportione et proportionalità, littorali et vulgari cum sue figure et numeri possibili a cadauna secundo el Campano cum sue postille per tutto.
>
> Item l'opra detta de divina proportione zoe de corporibus regularibus et dependentibus et eorum fabricis, vulgare et figure dignissime in prospectiva
>
> Item un'opra detta de viribus quantitatis zoè dele forze quendam miraculose de numeri et quantità continua et vulgare.
>
> Item de ludo scachorum cum Illiatorum reprobatiorum dicto schiphaniora anchor vulgar.
>
> Item l'opra detta Summa de arithmetrica, geometria, proportione et proportionalità, alias del frate altre volte stampata in questa inclyta cità del 1494".

Senza entrare nel merito dei contenuti ci limiteremo a descrivere i libri di Luca dal Borgo, manoscritti o a stampa, evidenziando la struttura delle opere, il contesto storico nel quale ebbero origine e le fonti alle quali attinse l'autore.

1 - Il «Tractatus mathematicus ad discipulos Perusinos» (1478)

Dei tre manuali di matematica, che Pacioli nella *Summa* dice di aver scritto, ci resta soltanto il trattato per gli studenti di Perugia. Bernardino Baldi, nelle *Vite inedite di tre matematici* (1589), riferisce che frate Luca "ad istanza de la gioventù de la detta città che l'udiva, compose un breve trattatello de la detta arte algebratica e dedicollo a la gioventù medesima perugina". Boncompagni individuò il "trattatello" di cui parla Baldi nel codice Vaticano Latino 3129, quando nel 1874 ne venne a conoscenza, dopo aver consultato un antico indice dei manoscritti contenuti nella Biblioteca vaticana.

Il trattato, redatto da Pacioli in funzione dei corsi universitari degli anni 1477-1480, fu scritto tra il 13 dicembre del 1477, vigilia di Santa Lucia, e il 29 aprile del 1478. Dato il breve lasso di tempo nel quale l'autore dichiara di aver scritto il ponderoso trattato, che consta di ben 396 fogli, è verosimile credere che nel compilarlo abbia adoperato molto del materiale presente già nel precedente manuale per i fratelli Rompiasi di Venezia. Per rispondere alle ripetute richieste degli studenti di Perugia il frate si impegnò "a componere, immo potius a coactare e redigere insiemi ordinatamente molti modi e petitioni e operationi facte per molti antichi nostri antecessori". Quando Pacioli parla dei "molti antichi nostri antecessori" allude chiaramente alla plurisecolare tradizione matematica dei maestri d'abaco. Il manuale di matematica per gli studenti di Perugia è infatti un tipico trattato d'abaco, composto raccogliendo e ordinando metodi, problemi e operazioni, contenuti nei numerosi testi in lingua volgare e con scrittura mercantesca, che i maestri di matematica compilavano nelle scuole d'abaco del XIII e XIV secolo.

Il codice Vaticano Latino 3129, pur non raggiungendo la complessità e la raffinatezza di alcuni altri trattati coevi, si presenta come una enciclopedia della matematica abachistica. Il manuale si occupa, infatti, oltre che della matematica ad uso dei mercanti, anche di argomenti di interesse non specificatamente commerciale, come i radicali, l'aritmetica ricreativa, la geometria pratica e l'algebra, che occupano le parti XI-XVI, per un totale di 147 carte su 396. Vengono proposte questioni algebriche che talvolta richiedono la soluzione di equazioni incomplete di terzo grado; c'è una trattazione dei radicali che comprende anche l'algoritmo per l'estrazione di radici quadrate e cubiche; si affrontano "ragioni" geometriche che presuppongono la conoscenza di formule risolutive per il calcolo di superfici e volumi e non mancano le progressioni e le regole di "falsa positione". Il codice pacioliano, insomma, raccoglie una grossa quantità della matematica pratica insegnata nelle scuole d'abaco del Quattrocento e si spinge ad affrontare argomenti di livello sicuramente superiore a quello necessario per soddisfare le esigenze normali di un mercante o di un tecnico.

Il *Tractatus* si divide in diciassette parti, che possiamo raggruppare in due macrosezioni: quella dedicata alla matematica commerciale, che occupa le prime dieci per un totale di 213 carte; e quella più avanzata che riguarda l'algebra, la geometria e i radicali, che va da carta 214 a carta 361. Tra queste due macrosezioni Pacioli inserisce un capitolo di matematica ricreativa, che contiene 38 divertenti "bolzoni" di enigmistica. Conclude il trattato una *Tariffa mercantesca* seguita da alcune aggiunte postume di Pacioli su problemi particolarmente difficili e rettifiche di soluzioni già date nel corso dell'opera (carte 361-396).

Il trattato del 1478 si configura, pertanto, come una raccolta di circa 800 problemi, raggruppati per ordine tematico nello stile della tradizione abachistica. Molti dei problemi di matematica pratica in esso contenuti confluiranno nella nona distinzione della *Summa*: ciò nonostante per la struttura del testo e per la parte non trascurabile di "teoria" in essa contenuta la *Summa* supera i confini della matematica abachistica e si distingue nettamente dal trattato scritto per i discepoli di Perugia.

2 - La «Summa de arithmetica, geometria, proportioni et propotionalita». Matematica dotta e matematica dei "pratici vulgari": la sintesi di Luca Pacioli

La *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* si configura, nelle intenzioni del suo autore, come un'opera destinata ad un vasto pubblico di lettori. Pacioli, infatti, sceglie di scrivere la sua enciclopedia matematica in "materna e vernacula lengua": "in modo che litterati e vulgari oltra l'utile ne haranno grandissimo piacere in essa exercitandose. E sienno dati a che arti, mistieri e facultà si voglia; per l'ampla generalità che in essa si contene, da poterse a tutte cose applicare".

L'opera, quindi, si rivolge sia ai "litterati", che padroneggiano il latino e coltivano le "facultà" liberali, sia ai "vulgari" che esercitano un'arte o un mestiere e conoscono soltanto il volgare. Ciò che accomuna la cultura latina dei dotti e quella volgare dei tecnici è, secondo l'autore, la necessità dell'uso della matematica sia nelle arti meccaniche che in quelle liberali.

Qualunque sia l'arte, il mestiere o la "facultà" del lettore l'opera – dice Pacioli - risulterà comunque utile, dato che la matematica è tale "da poterse a tutte cose applicare".

La *Summa*, pertanto, si colloca in uno spazio intermedio tra il sapere pratico dei tecnici e dei mercanti e quello teorico coltivato nelle università: da una parte costituisce il compendio più completo delle conoscenze elaborate dalla tradizione delle scuole d'abaco; dall'altra si pone sulla scia delle opere di autori come Euclide, Boezio, Leonardo Pisano, Giordano Nemorario, Biagio Pelacani da Parma e Prosdocimo Beldomandi, poiché inserisce elementi di matematica teorica e "speculativa" all'interno della tradizione abachistica.

Ad illustrissimum Principem Gui. Ubaldum Urbini Ducē Montis feretri: ac Durantis Comitem. Grecis latinisq litteris ornatissimum: et Mathematice discipline cultorem ferventissimum: Fratris Luce de Burgo sancti Sepulchri: Ordinis minorum: et sacre Theologie Magistri. In artem arithmetice et Geometrie. Prefatio.

A quantita Magnanimo Duca: e si nobile e excellēte cosa che molti phylosophi per questo lhano giudicata ala substantia para: ecōessa coeterna. Peroche hano cognosciuto per verū modo alcuna cosa in rerū natura sença lei nō potere existere. Per la qual cosa de lei itēdo (cō laiuto de colui che li nostri sensi reggi) tractarne: nonche per altri prischi e antichi phylosophi nonne sia copiosamente tractato: e in theorica e pratica. Ma per che lor dicti gia ali tempi nostri sonno molto obscuri: e da molti male apresi: e ale pratiche vulgari male applicati: diche i loro operationi molto variano: e con grandi e laboriosi affanni mettano in opera: si de numeri cōmo de misure: vnde di lei parlando non intendo se non quāto che ala pratica e operare sia mestiero: mescolandoci secōdo iluoghi oportuni ancora la theorica: e causa de tale operare: si de numeri cōmo de geometria. Ma prima accio meglio qllo che sequita se habia apprehēdere: essa quantita diuideremo secōdo el nostro proposito: e diuidendola aciascun suo membro assegnaremo sua propria e vera diffinitione e descriptione. E alora poi sequira quello che Arist. dici in secundo poster. Tūc enim maxime scimus aliquid cum habetur suum quid est et c.

Fig. 25 – *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,* Dedica.

Luca dal Borgo, nella presentazione della *Summa,* chiarisce a Guidubaldo da Montefeltro che la sua trattazione della "quantità" si riferisce a "quanto che alla pratica e operare sia mestiero"; ma – aggiunge subito dopo – "mescolandoci secondo li luoghi oportuni anchora la theorica, e causa de tale operare, sì de numeri commo de geometria". Il risultato complessivo dell'operazione di raccordo tra la cultura dotta e quella pratica consiste in una mescolanza di argomenti provenienti sia da fonti dotte di lingua latina, sia da testi della tradizione matematica abachistica, scritta in volgare con scopi prettamente applicativi. Pacioli di volta in volta cerca di mediare i due mondi culturali, sia nella scelta dei contenuti da esporre, sia nello stile della sua comunicazione.

Lo scopo della *Summa* è la divulgazione delle regole pratiche di calcolo. Ciò nonostante in molti casi frate Luca si preoccupa di dimostare la legittimità teorica di quelle regole. L'opera, così, pretende di avere anche un valore fondativo in quanto riconduce la procedura di calcolo usata dai "pratici vulgari" alla dimostrazione geometrica o teorica, elaborata dai "dotti". Questa corrispondenza tra le regole che consentono di operare e la legittimazione teorica che invece ne dimostra la certezza, costituisce il filo rosso della *Summa*.

Stampata per la prima volta a Venezia nel 1494, per i tipi di Paganino Paganini, l'opera riveste un'importanza centrale nella storia della matematica poiché in essa convergono molte delle branche della disciplina coltivate nel Medioevo e a partire da essa si sviluppano le ricerche dei matematici rinascimentali. "La *Summa* – è stato scritto – è un'opera totale, che compendia e rende obsoleti tutti gli scritti d'abaco che l'avevano preceduta; un'opera con cui si misureranno i maggiori matematici del secolo successivo, non fosse altro che per rilevarne gli errori, e da cui prenderanno le mosse per superare per la prima volta le colonne d'Ercole delle scoperte degli antichi" .

Nel corso del XVI secolo le citazioni della *Summa* nelle opere dei grandi matematici sono numerose e attestano l'importanza e la diffusione del libro. Girolamo Cardano riconobbe esplicitamente il suo debito verso Pacioli, meritevole di aver raccolto in un unico volume tutte le conoscenze matematiche che dal Fibonacci in poi erano state elaborate. La *Summa* appariva agli occhi di Cardano un'opera centrale della storia dell'algebra, paragonabile soltanto al *Liber abaci* di Leonardo Pisano. Con la *Summa* si confrontarono, infatti, sia Cardano, che nell'ultimo capitolo della *Practica Arithmeticae* (1539) individuò e corresse diciannove "errori di Frate Luca" , sia Tartaglia che ne approntò una «correttione» da dare alle stampe. Nonostante le ripetute invettive contro il frate di Sansepolcro, accusato di essersi indebitamente appropriato di meriti che spettavano di diritto a Leonardo Pisano, il matematico bresciano, che come Pacioli proveniva dalle scuole d'abaco, considerò il suo *General Trattato di Numeri et Misure* (Venezia 1556-1560) come una revisione più ordinata e sistematica del materiale contenuto nella *Summa*. Altri grandi matematici italiani del Cinquecento rilevarono l'importanza dell'opera: Francesco Maurolico la commentò in una sua lettera a Juan de Vega e Raffaele Bombelli, da parte sua, considerò Pacioli il "primo che la luce diede a quella scientia" e riconobbe nella *Summa* una delle fonti principali della sua *Algebra* (1572). Se Federico Commandino, convinto della validità dell'opera di frate Luca ancora nella seconda metà del XVI secolo, era intenzionato a riscrivere la *Summa* in uno stile più confacente alle scienze matematiche, ciò significa che il libro di Pacioli costituiva un punto di riferimento imprenscindibile non soltanto per i tecnici e i mercanti del Rinascimento ma anche per i matematici teorici.

La *Summa* è composta di 308 carte in folio. Le prime otto non sono numerate e contengono, oltre all'epistola dedicatoria a Guidubaldo da Montefeltro, un sommario dell'opera e un dettagliato indice degli argomenti. Le carte numerate da 1 a 150 si occupano di aritmetica speculativa e pratica, operazioni con i radicali e algebra. Le ultime 74 carte della prima parte (cc. 150-224) contengono invece un trattato di matematica commerciale e una tariffa.

La seconda parte della *Summa* "tratta de Geometria in tutti li modi, Theorica e pratica". L'intera sezione, divisa in otto distinzioni, occupa 76 carte, nelle quali Pacioli fornisce al lettore un ampio compendio di geometria, che tratta "quanto ala pratica se aspecti; e anco la theorica de tutte le operationi, sempre con degni fondamenti de philosophi, chiari e aperti, per litterati e vulgari".

L'opera, pertanto, nel suo insieme appare come un monumentale compendio di materiali appartenenti a quattro distinti campi della matematica: aritmetica, algebra, "ragioneria" e geometria. Per completare il quadro delle matematiche conosciute a quel tempo manca, oltre all'astronomia tolemaica, soltanto la trigonometria, nota sia a Georg Peurbach, autore del libro *Theoricae novae planetarum*, pubblicato nel 1472, sia soprattutto a Regiomontano, che nel *De triangulis omnimodis*, risalente al 1464, presentava un'esposizione sistematica dei metodi per risolvere problemi relativi ai triangoli. Nella *Summa* compare una tavola delle corde tratta dalla *Practica geometriae* di Fibonacci ma non c'è una trattazione sistematica delle funzioni trigonometriche elementari (seno, coseno, tangente). L'opera di Regiomontano, del resto, rimase manoscritta fino alla prima edizione a stampa realizzata a Norimberga nel 1533. Se si escludono astronomia e trigonometria, quindi, la *Summa* si configura come un'enciclopedia delle conoscenze matematiche, pratiche e teoriche, del basso Medioevo e del primo Rinascimento .

Lo scopo del libro è, per esplicita dichiarazione dell'autore, prettamente didattico. Nel motivare il titolo dell'opera Pacioli afferma di aver raccolto "molte varie e diverse parti necessarissime de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita", con un duplice fine: offrire al lettore una "summa" delle regole di matematica pratica conosciute; e illustrare "de ciascun atto operativo suoi fondamenti secondo li antichi e ancor moderni philosophi".

Nella *Summa* si profila pertanto un incontro fra la matematica teorica dell'università e la matematica pratica della bottega d'abaco; ma questo incontro non avviene – per così dire – a metà strada. Si tratta piuttosto del tentativo di un frate francescano, che fa il maestro d'abaco ma che è anche *magister theologiae*, di colmare il fossato linguistico, culturale e sociale, tra la "bottega" e l'università. Questo difficile incontro della cultura dei tecnici con quella dei dotti sembra rispecchiarsi anche nella lingua usata da Pacioli, che appare come un infelice ibrido tra un volgare toscano spurio, infarcito di vocaboli veneti, e un latino scolastico che si intreccia con la trama volgare in occasione delle citazioni dai classici. Se a queste caratteristiche linguistiche si aggiungono le difficoltà di interpretazione connesse ai caratteri a stampa semigotici e alle numerose abbreviazioni e contrazioni delle parole, si comprendono le critiche degli umanisti al linguaggio "rozzo e barbaro" di Pacioli e appare anche plausibile il progetto di Commandino di riscrivere la *Summa* con uno stile più comprensibile.

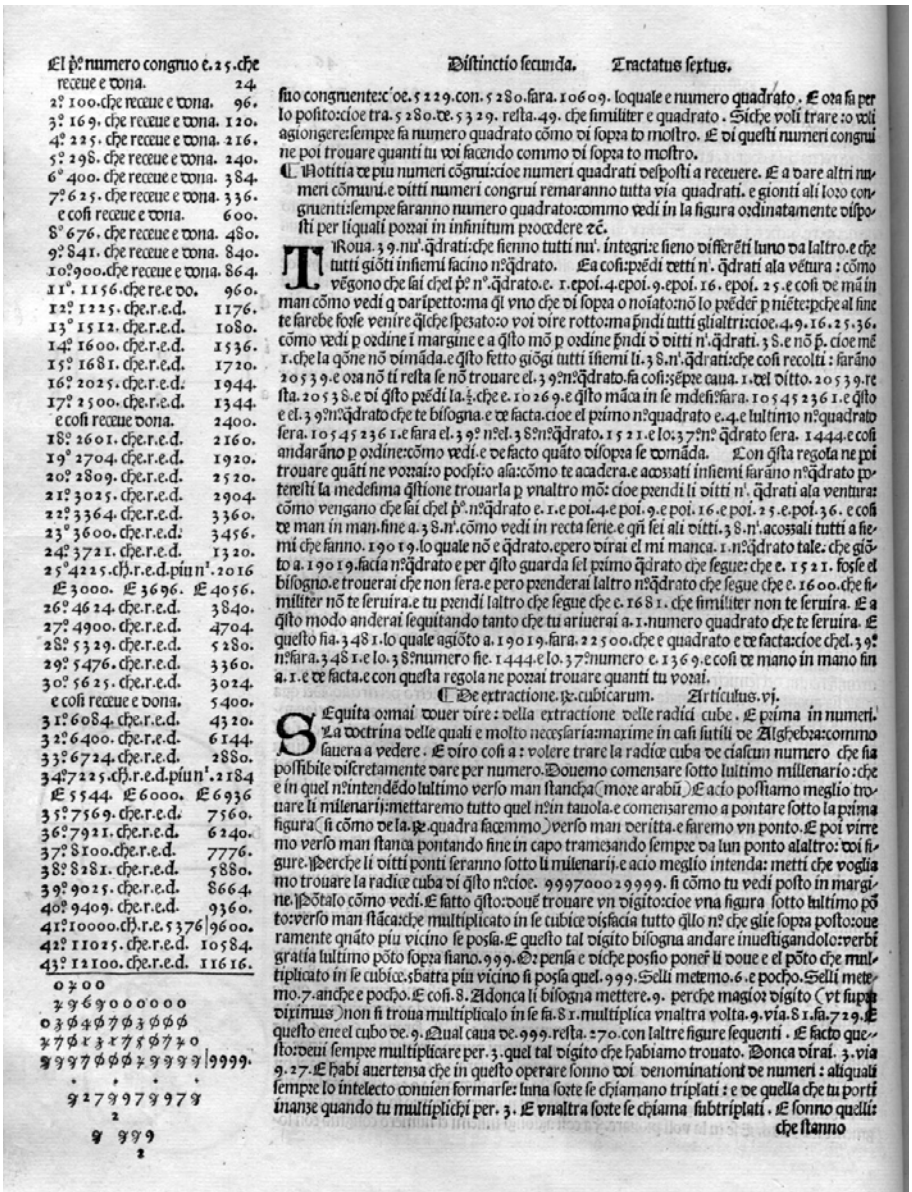
L'opera è dedicata al principe Guidubaldo da Montefeltro, duca di Urbino, presso la cui corte Pacioli aveva soggiornato in compagnia del matematico e astrologo Paul van Middelburg e di Ottaviano degli Ubaldini "a li cui sublimi iuditii - afferma Pacioli riferendosi ai due personaggi della corte urbinate - meritamente la presente opra per charità commetto in approbando el ben detto, e reprobando li errori se alcun vi fosse, e lo superfluo in tutti i modi resecando, e giognendo al diminuito" .

La citazione di Paolo di Middelburg e Ottaviano degli Ubaldini apre uno squarcio sulla corte urbinate del secondo Quattrocento. Urbino, infatti, per iniziativa di Federico da Montefeltro prima e di suo figlio Guidubaldo poi, era diventato un centro rinascimentale fervido di iniziative culturali e artistiche. In particolare, i duchi coltivavano un vivo interesse per le scienze matematiche, che li spinse ad ospitare personaggi, come Piero della Francesca, lo stesso Luca Pacioli e Paolo di Middelburg, che spiccavano per fama e perizia nella conoscenza di queste discipline.

La figura di Paolo di Middelburg assunse un ruolo di primo piano all'interno della corte di Federico. Come racconta Vespasiano da Bisticci, organizzatore della biblioteca urbinate:

"Di geometria et d'arismetrica n'aveva [Federico da Montefeltro] buona peritia, et aveva in casa sua uno maestro Pagolo, tedesco, grandissimo filosofo et astrolago. Et di geometria et d'arismetrica aveva bonissima notitia. Et non molto tempo innanzi che si morissi, si fece legere da maestro Pagolo opere di geometria et d'arismetrica, et parlava dell'una et dell'altra come quello che n'aveva piena notitia".

Paolo di Middelburg era astrologo e medico di corte e prestò i suoi servizi presso i Montefeltro anche sotto il duca Guidubaldo. Al giudizio di questo personaggio, Pacioli sottopone la *Summa*, a testimonianza del fatto che l'opera, lungi dal costituire un semplice trattato d'abaco, aveva la pretesa di rivolgersi anche ad un lettore dotto, rappresentante di una cultura matematica di tipo universitario. Paolo di Middelburg, infatti, come riferisce Bernardino Baldi nelle *Vite de' matematici*, era stato "lettore ordinario de l'astrologia ne lo Studio di Padova", e nei suoi scritti aveva dimostrato una conoscenza approfondita delle scienze matematiche. Le cento questioni contenute nella settima parte del suo *Inclitum prognosticon pro anno Christi 1480* spaziano ad abbracciare le più svariate applicazioni della matematica: astronomia e strumenti d'osservazione, geometria di misura, prospettiva, meccanica, aritmetica, musica, stereometria, cinematica e scienza dei pesi. Come ebbe a rilevare il Baldi, da questo pronostico –"si scopre quanto in tutti i generi de le matematiche egli fosse versato". È anche per questo motivo che Pacioli affidò il vaglio della sua opera enciclopedica ai "sublimi iudicii" di Paolo di Middelburg, certo di trovare nell'astronomo uno studioso insigne e competente, in grado di muoversi con disinvoltura negli svariati campi di applicazione delle scienze matematiche contenuti nella *Summa*.



El p.° numero congruo e.25.che receue e dona. 24
2.° 100.che receue e dona. 96.
3.° 169. che receue e dona. 120.
4.° 225. che receue e dona. 216.
5.° 298. che receue e dona. 240.
6.° 400. che receue e dona. 384.
7.° 625. che receue e dona. 336.
e cosi receue e dona. 600.
8.° 676. che receue e dona. 480.
9.° 841. che receue e dona. 840.
10.° 900.che receue e dona. 864.
11.° 1156.che re.e do. 960.
12.° 1225. che.r.e.d. 1176.
13.° 1512. che.r.e.d. 1080.
14.° 1600. che.r.e.d. 1536.
15.° 1681. che.r.e.d. 1720.
16.° 2025. che.r.e.d. 1944.
17.° 2500. che.r.e.d. 1344.
e cosi receue dona. 2400.
18.° 2601. che.r.e.d. 2160.
19.° 2704. che.r.e.d. 1920.
20.° 2809. che.r.e.d. 2520.
21.° 3025. che.r.e.d. 2904.
22.° 3364. che.r.e.d. 3360.
23.° 3600. che.r.e.d. 3456.
24.° 3721. che.r.e.d. 1320.
25.° 4225.ch.r.e.d.piu n.i.2016
E 3000. E 3696. E 4056.
26.° 4624. che.r.e.d. 3840.
27.° 4900. che.r.e.d. 4704.
28.° 5329. che.r.e.d. 5280.
29.° 5476. che.r.e.d. 3360.
30.° 5625. che.r.e.d. 3024.
e cosi receue e dona. 5400.
31.° 6084. che.r.e.d. 4320.
32.° 6400. che.r.e.d. 6144.
33.° 6724. che.r.e.d. 2880.
34.° 7225.ch.r.e.d.piu n.i.2184
E 5544. E 6000. E 6936
35.° 7569. che.r.e.d. 7560.
36.° 7921. che.r.e.d. 6240.
37.° 8100.che.r.e.d. 7776.
38.° 8281. che.r.e.d. 5880.
39.° 9025. che.r.e.d. 8664.
40.° 9409. che.r.e.d. 9360.
41.° 10000.ch.r.e.5376|9600.
42.° 11025. che.r.e.d. 10584.
43.° 12100. che.r.e.d. 11616.

Distinctio secunda. Tractatus sextus.

suo congruente:cioe.5229.con.5280.fara.10609. loquale e numero quadrato. E ora fa per lo posito:cioe tra.5280.de.5329. resta.49. che similiter e quadrato. Siche voli trare:o voli agiongere:sempre fa numero quadrato cõmo di sopra to mostro. E di questi numeri congrui ne poi trouare quanti tu voi facendo commo di sopra to mostro.

Notitia de piu numeri cõgrui:cioe numeri quadrati desposti a receuere. E a dare altri numeri cõmuni.e ditti numeri congrui remaranno tutta via quadrati. e gionti ali loro congruenti:sempre faranno numero quadrato:commo vedi in la figura ordinatamente disposti per liquali porrai in infinitum procedere rc.

TRoua.39.nu.i.q̃drati:che sienno tutti nu.i. integri:e sieno differẽti luno da laltro.e che tutti giõti insiemi facino n.°q̃drato. Fa cosi:prẽdi detti n.i. q̃drati ala vẽtura: cõmo vẽgono che sai chel p.° n.°q̃drato.e. 1.epoi.4.epoi.9.epoi.16. epoi. 25.e cosi de mã in man cõmo vedi q dari petto:ma ql vno che di sopra o noiato:nõ lo prẽder p niẽte:pche al fine te sarebe forse venire q̃lche spezato:o voi dire rotto:ma p̃ndi tutti glialtri:cioe.4.9.16.25.36. cõmo vedi p ordine i margine e a q̃sto mõ p ordine p̃ndi o ditti n.i.q̃drati.38.e nõ p̃. cioe mẽ 1.che la qõne nõ dimãda.e q̃sto fetto giõgi tutti isiemi li.38.n.i.q̃drati:che cosi recolti: farãno 20539.e ora nõ ti resta se nõ trouare el.39.°n.°q̃drato.fa cosi:sẽpre caua.1.del ditto.20539.resta.20538.e di q̃sto prẽdi la.½.che e.10269.e q̃sto mãca in se medesi.°fara.105452361.e q̃sto e el.39.°n.°q̃drato che te bisogna.e de facta.cioe el primo n.°quadrato e.4.e lultimo n.°quadrato sera.105452361.e fara el.39.° n.°el.38.°n.°q̃drato.1521.e lo.37.°n.° q̃drato sera. 1444.e cosi andarãno p ordine:cõmo vedi.e de facto quãto di sopra se domãda. Con q̃sta regola ne poi trouare quãti ne vorrai:o pochi:o asa:cõmo te acadera.e acozzati insiemi farãno n.°q̃drato. Poteresti la medesima q̃stione trouarla p vnaltro mõ: cioe prendi li ditti n.i. q̃drati ala ventura: cõmo vengano che sai chel p.°.n.°q̃drato e.1.e poi.4.e poi.9.e poi.16.e poi.25.e.poi.36. e cosi de man in man.fine a.38.n.i.cõmo vedi in recta serie.e qñ sei ali ditti.38.n.i.acozzali tutti a siemi che fanno.19019.lo quale nõ e q̃drato.e pero dirai el mi manca.1.n.°q̃drato tale: che giõto a.19019.facia n.°q̃drato e per q̃sto guarda sel primo q̃drato che segue: che e. 1521. fosse el bisogno.e trouerai che non sera.e pero prenderai laltro n.°q̃drato che segue che e.1600.che similiter nõ te seruira.e tu prendi laltro che segue che e.1681. che similiter non te seruira. E a q̃sto modo anderai sequitando tanto che tu ariuerai a.1.numero quadrato che te seruira. E questo fia.3481.lo quale agiõto a.19019.fara.22500.che e quadrato e de facta:cioe chel.39.° n.°fara.3481.e lo.38.°numero fie.1444.e lo.37.°numero e.1369.e cosi de mano in mano fin a.1.e de facta.e con questa regola ne porrai trouare quanti tu vorai.

De extractione. R.cubicarum. Articulus.vj.

SEquita ormai douer dire: della extractione delle radici cube. E prima in numeri. La doctrina delle quali e molto necessaria:maxime in casi sutili de Algebra:commo sauera a vedere. E diro cosi a: volere trare la radice cuba de ciascun numero che sia possibile discretamente dare per numero. Douemo comenzare sotto lultimo millenario:che e in quel n.°intendẽdo lultimo verso man stancha (more arabũ) E acio possiamo meglio trouare li milenarij:mettaremo tutto quel n.°in tauola.e comenzaremo a pontare sotto la prima figura (si cõmo de la.R.quadra facemmo) verso man deritta.e faremo vn ponto. E poi dirremo verso man stanca pontando fine in capo tramezando sempre da lun ponto alaltro: doi figure. Perche li ditti ponti seranno sotto li milenarij.e acio meglio intenda: metti che vogliamo trouare la radice cuba di q̃sto n.°cioe. 999700029999. si cõmo tu vedi posto in margine. Põtalo cõmo vedi. E fatto q̃sto:douẽ trouare vn digito:cioe vna figura sotto lultimo põto:verso man stãca:che multiplicato in se cubice disfacia tutto q̃llo n.° che glie sopra posto:oueramente qnãto piu vicino se possa. E questo tal digito bisogna andare inuestigandolo:verbi gratia lultimo põto sopra stano.999. Or pensa e diche possio ponẽr li doue e el põto che multiplicato in se cubice.sbatta piu vicino si possa quel.999. Selli metemo.6.e pocho. Selli metemo.7.anche e pocho. E cosi.8. Adonca li bisogna mettere.9. perche magior digito (vt supra diximus) non si troua multiplicalo in se fa.81.multiplica vnaltra volta.9.via.81.fa.729. E questo ene el cubo de.9. Qual caua de.999.resta.270.con laltre figure sequenti. E facto questo:deui sempre multiplicare per.3.quel tal digito che habiamo trouato. Donca dirai. 3.via 9.27. E habi auertensa che in questo operare sonno doi denominationi de numeri: aliquali sempre lo intelecto conuien formarse: luna sorte se chiamano triplati: e de quella che tu porti inanze quando tu multiplichi per. 3. E vnaltra sorte se chiama subtriplati. E sonno quelli: che stanno

Fig. 26 - Luca Pacioli, *Summa, Distinctio II, Tract. II.* I numeri congruo-congruenti

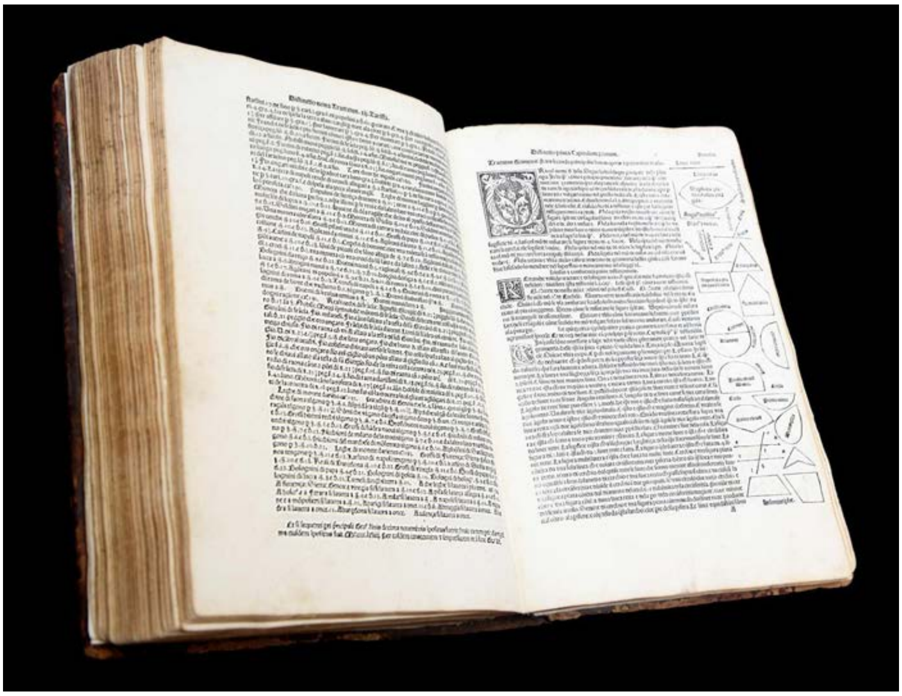


Fig. 27 – Luca Pacioli, *Summa, Distinctio Nona, Tractatus XII*

3 - Le fonti della «Summa»

Com'è stato più volte affermato, la *Summa* fu un'opera più influente che originale. Pacioli, infatti, propone un manuale ad uso del "perspectivo, musico astrologo, cosmographo, architecto, legista e medico", compendiando i risultati ottenuti dagli "antichi e ancora moderni mathematici" fra i quali il frate cita i nomi di Euclide, Boezio, Leonardo Pisano, Giordano Nemorario, Biagio Pelacani da Parma, Giovanni Sacrobosco e Prosdocimo Beldomandi. Frate Luca aveva potuto consultare le opere di questi autori sia nella biblioteca urbinate di Federico da Montefeltro, sia in quella di San Marco a Firenze, dove aveva cominciato a raccogliere il materiale per la *Summa*. Oltre agli *Elementi* di Euclide, noti nella versione latina del Campano, stampata da Ratdolt a Venezia nel 1482, e al *De institutione arithmetica* di Boezio, testo molto diffuso nelle università medievali, Pacioli era quindi a conoscenza del *Liber abaci* (1202) di Leonardo Fibonacci, da cui dipende in modo diretto o indiretto gran parte della *Summa*. Il matematico di Sansepolcro dichiara, inoltre, di aver letto l'*Arithmetica* e il *De numeris datis* di Giordano Nemorario risalenti al XIII secolo, che contengono problemi algebrici oltre che prettamente aritmetici, le opere di Biagio Pelacani da Parma e la *Sphera mundi* del Sacrobosco, testo celebre e molto diffuso in tutta Europa .

Circa la citazione delle fonti che frate Luca prepone alla *Summa* è stato rilevato come Pacioli si dichiari in debito verso autori famosi, da alcuni dei quali non sembra, in realtà, avere tratto ispirazione, mentre non cita testi dai quali, quasi sicuramente, ha preso materiale per il suo lavoro di compilazione. I maestri d'abaco, infatti, non sono mai citati, quasi a voler ricondurre tutta la tradizione abachistica a Leonardo Fibonacci e inserire la *Summa* nel solco della matematica "dotta" di lingua latina.

In ogni modo, la reticenza di Pacioli a citare le fonti da cui attinge il materiale per la compilazione dell'opera riapre l'annosa quanto sterile querelle sui plagi matematici di frate Luca che ha diviso il mondo degli storici tra innocentisti e colpevolisti dai tempi del Vasari fino ad oggi. Qui non si tratta tanto di emettere una sentenza sulla moralità dell'uomo Pacioli, quanto di valutare l'importanza della sua opera per gli sviluppi della scienza. Per questa ragione, lasciando da parte il processo storico a frate Luca, ci limiteremo ad indicare le fonti delle varie parti della *Summa*.

Tra le fonti "dotte" citate dal frate, Boezio, Euclide e Fibonacci rivestono un ruolo di primo piano. Boezio compare in maniera prevalente nella prima distinzione della *Summa* dedicata all'aritmetica speculativa (cc. 1-19). La teoria dei numeri di Pacioli dipende soprattutto dal *De institutione arithmetica*, citato 14 volte. L'Euclide del Campano attraversa tutta la *Summa*, ed è presente in quei trattati delle diverse distinzioni in cui il frate tenta di dimostrare per via geometrica la validità delle regole algebriche ed aritmetiche. Per quanto riguarda, infine, Fibonacci, Pacioli lo cita per 9 volte come uno degli autori "dai quali in maggior parte cavo el presente volume" . Il *Liber abaci* (1202), infatti, costituisce il principale testo di riferimento dalla seconda all'ottava distinzione, dedicate all'aritmetica pratica e all'algebra. Il *Liber quadratorum* è impiegato nell'ultima parte della prima distinzione (cc. 15-19), mentre la *Practica geometriae* (1220) è presente nella volgarizzazione del codice palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze inserita nelle prime 59 carte del Trattato di "Geometria in tutti li modi Theorica e pratica" che conclude la *Summa*.

Le fonti di questo trattato, che nelle intenzioni di Pacioli si colloca - come il resto della *Summa* - tra il sapere dei "litterati" e quello dei "vulgari", sono costituite dai primi libri degli *Elementi* di Euclide, dalla

Practica geometriae del Fibonacci (la volgarizzazione della quale occupa la maggior parte del trattato) e dal *Trattato d'Abaco* di Piero della Francesca.

Occorre, tuttavia, ricordare che, se per l'opera del pittore del Borgo, Pacioli ricorre direttamente alla fonte, per Euclide e Fibonacci si avvale di una compilazione quattrocentesca. La seconda parte della *Summa* ricalca, nelle carte 1-59v, il Codice Palatino 577 (ca. 1460) della Biblioteca Nazionale di Firenze. Questo manoscritto contiene senza dubbio una delle opere geometriche più importanti del Rinascimento italiano. Le prime 241 carte del codice, infatti, sono occupate da una libera volgarizzazione della *Practica geometriae* del Fibonacci, che supera di gran lunga, per ampiezza e rigore, altre versioni ridotte dell'opera del pisano - come ad esempio la *Pratica di geometria* di Cristofano di Gherardo di Dino - che circolavano nelle scuole d'abaco del XV secolo. Nel Palatino 577, risalente alla seconda metà del XV secolo, è inserita inoltre, nelle carte 252r-292r, anche una versione volgare, arricchita da splendide miniature, del *Liber quadratorum* di Leonardo Pisano e ciò rende il manoscritto meritevole di uno studio approfondito da parte degli storici della matematica.

Dal confronto tra il codice palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze e la seconda parte della *Summa* emerge evidente la stretta dipendenza della seconda dal primo. Esistono tuttavia varianti e differenze non trascurabili, e sulla base di tali differenze possiamo avanzare due considerazioni: 1)l'intervento di Pacioli, oltre ad una marcata tendenza ad assimilare l'opera nel contesto della *Summa*, è finalizzato soprattutto a fornire una più ordinata organizzazione del testo in distinzioni e capitoli e a garantirne una solida fondazione teorica mediante il puntiglioso riferimento alle proposizioni degli *Elementi* di Euclide; 2)la mancanza nel codice Palatino di molte figure negli spazi predisposti nel manoscritto e la differente estensione di questo rispetto alla *Summa,* nell'ultima distinzione, lasciano supporre che probabilmente il Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze non sia la fonte diretta di Pacioli, ma possa essere una copia di un altro codice più completo.

Tra le altre fonti impiegate da Pacioli occorre ricordare il *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca, utilizzato per la parte sui cinque poliedri regolari contenuta nella *Summa,* e il *Libro che tracta de mercatantie et usanze de paesi*, pubblicato a Firenze nel 1481, che Pacioli incorpora senza citarne la provenienza nella nona distinzione, quando nel XII trattato compila la "Tariffa de tutti i costumi, cambi, monete, pesi, misure e usanze" (cc. 211-224). Per quanto riguarda, invece, la matematica commerciale e le scritture contabili, frate Luca si avvale di molto del materiale già approntato nel *Trattato* del 1478 per i discepoli perugini. L'intera nona distinzione della *Summa* riproduce, infatti, con qualche modifica nella forma espositiva, il contenuto delle prime sette parti del trattato di Perugia. Da questo manuale, inoltre, frate Luca trae molti dei problemi contenuti nelle sezioni della *Summa* che si occupano dell'estrazione di radice, delle progressioni e delle regole del *catayn*. Ciò che cambia radicalmente rispetto al trattato del 1478 è l'impostazione generale dell'opera. Mentre il *Trattato* (1478) scritto per i perugini assomiglia ad un prontuario di matematica abachistica con scopi esclusivamente applicativi, la *Summa* appare come un'opera più organica che all'applicazione pratica delle regole solitamente fa seguire la "dimostrazione" geometrica. Si prenda, ad esempio, la trattazione delle regole del *catayn*: nel Trattato (1478) esse vengono semplicemente enunciate ed esemplificate nelle applicazioni; nella *Summa*, invece, Pacioli fornisce la "cagione e demostratione geometrica" delle regole del più e del meno utilizzate. In questa tendenza ad inserire la "dimostrazione" affianco all'applicazione, la *Summa* si pone ad un livello superiore rispetto alla tradizione abachistica, poiché introduce all'interno della manualistica delle scuole d'abaco elementi di matematica teorica e speculativa in misura maggiore di quanto fosse stato fatto precedentemente.

In altri termini, l'elemento originale che Pacioli inserisce nella *Summa* non è nel contenuto, che il frate saccheggia sistematicamente da altri autori, ma è nell'ordinamento strutturale dell'opera, che consente di presentare in veste enciclopedica il sapere abachistico con tutti gli aggiustamenti e le correzioni apportate da Leonardo Pisano fino alla fine del XV secolo. Come il *Liber abaci* (1202) aveva rappresentato il testo di riferimento dell'aritmetica e dell'algebra medievale, così la *Summa* (1494) costituì nel Cinquecento l'opera dalla quale partirono le ricerche dei maggiori matematici del Rinascimento. Il successo dell'opera, amplificato dal potere di diffusione della stampa, dipese – come giustamente rilevò Cardano – dal fatto di aver riunito in un unico volume ciò che prima era sparso in una miriade di manoscritti. Il criterio unificante dell'opera, che del resto rappresenta il filo conduttore del testo pacioliano, è costituito dalla teoria euclidea delle proporzioni contenuta nel V libro degli *Elementi* e volgarizzata da Luca Pacioli nella distinzione VI della *Summa*. Il linguaggio delle proporzioni per il frate di Sansepolcro costituisce, infatti, la sintassi universale con la quale formulare le leggi scientifiche e le regole delle arti e dei mestieri.

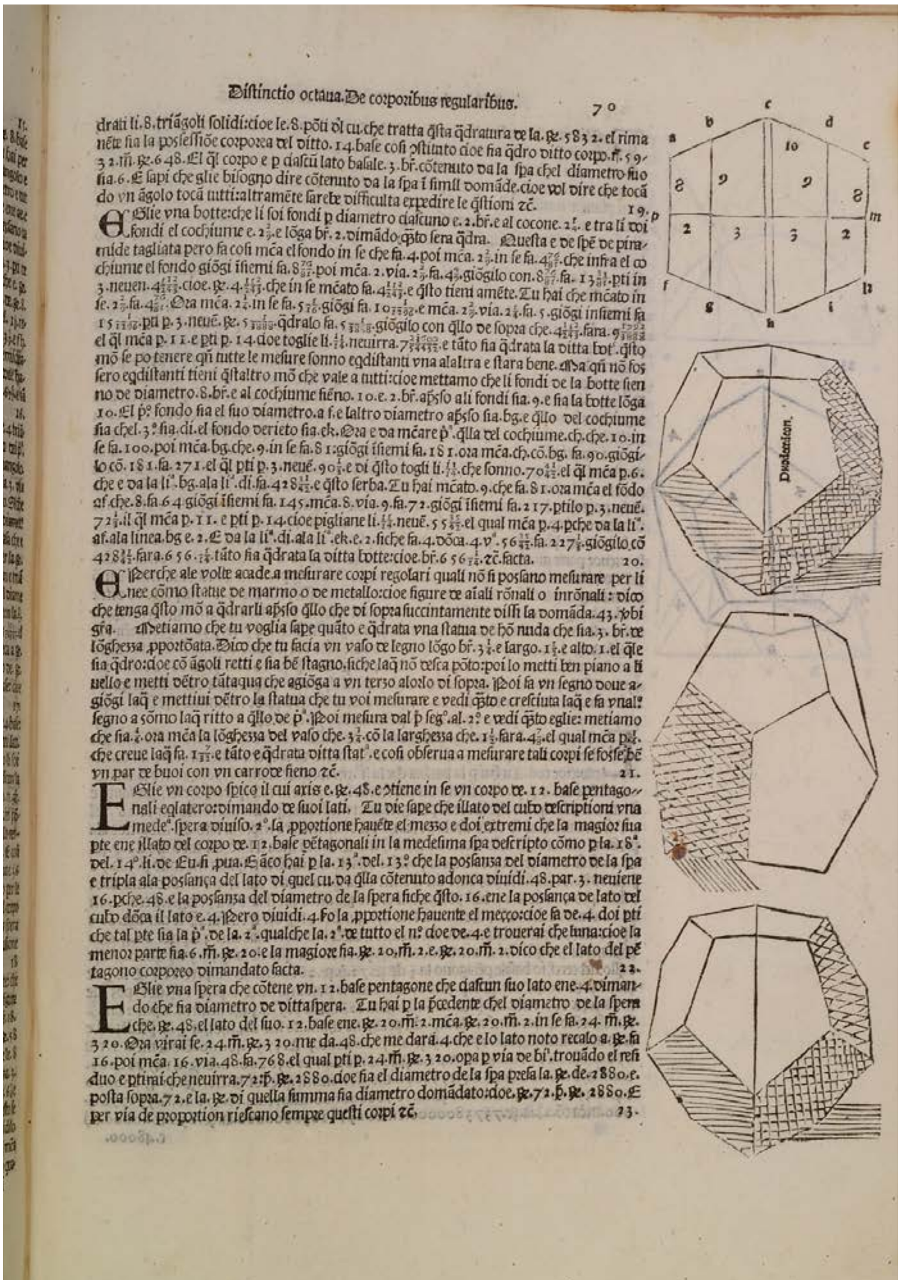


Fig. 28 - Luca Pacioli, *Summa, Trattato di geometria,* c. 50v. Problemi con dodecaedri

4 - Luca Pacioli: il padre della Ragioneria.

La nona distinzione della prima parte della *Summa* costituisce indubbiamente la sezione più conosciuta dell'opera di Pacioli, dato che ad essa è dovuta la fama del frate di Sansepolcro quale codificatore della tecnica di registrazione contabile a partita doppia .

La distinzione, che è la più estesa della *Summa* (cc.150r-224v), è composta di dodici trattati che affrontano tutti gli argomenti utili alla formazione del mercante rinascimentale. Dalle società commerciali ai baratti, dai cambi alle tariffe, viene sistematicamente esposto nell'opera di Pacioli tutto lo scibile nel campo della matematica finanziaria del tardo Medioevo. Il modello della trattazione della matematica commerciale ricalca il *Liber abaci* di Fibonacci, ma contiene gli aggiustamenti e gli aggiornamenti di matematica pratica necessaria per l'esercizio dell'arte del mercante nel XV secolo.

Alla nascita della ragioneria concorrono senza dubbio, oltre al *Liber abaci* di Leonardo Pisano, in gran parte dedicato all'uso commerciale dell'aritmetica e dell'algebra, anche buona parte dei manuali d'abaco prodotti nel corso dei quasi tre secoli che dividono Fibonacci da Luca Pacioli. Occorre tuttavia riconoscere che la *Summa* si configura come un primo tentativo di ordinamento ed esposizione rigorosa dei metodi di registrazione contabile, cioè in altri termini come una prima riflessione teorica sulla pratica del tenere in ordine i conti usata dai mercanti. Non a torto quindi gli storici della ragioneria riconoscono l'origine della loro disciplina nell'opera del frate di Sansepolcro e non in quella di Leonardo Pisano.

La tendenza di Pacioli a razionalizzare la pratica mercantesca e a fornire un'infarinatura teorica alla cosiddetta arte minore è riscontrabile già nel raffronto fra il trattato d'abaco del 1478, scritto per i discepoli di Perugia, e la *Summa*. Laddove il primo si configura, seguendo la consuetudine abachistica, semplicemente come una raccolta di ragioni pertinenti ai vari argomenti della matematica commerciale, la seconda invece tende ad organizzare la materia sulla base di definizioni e regole preposte all'inizio di ogni trattato. In altri termini, Pacioli nella *Summa* non si limita ad elencare una dietro l'altra delle "ragioni", cioè dei problemi inerenti ad uno specifico argomento (compagnie, baratti, cambi, viaggi ecc), ma inizia ogni trattato con una breve e sintetica "teoria" dell'argomento, che serve ad operare le dovute distinzioni tra tipi di compagnie, baratti, cambi e via dicendo, e ad ordinare di conseguenza i problemi ad essi relativi.

5 - Il trattato sulla partita doppia e la codificazione teorica della ragioneria.

Il *Tractatus de computis et scripturis*, l'undicesimo della nona distinzione (cc. 198-211), è la sezione della *Summa* per la quale il nome di Pacioli è forse maggiormente conosciuto. L'autore, infatti, vi descrive il metodo di registrazione contabile a partita doppia, o per dirla con le sue parole "el modo de Vinegia, quale fra gli altri è molto da commendare. E mediante quello in ogni altro se potrà guidare" .

Il trattato si apre con un *incipit* nel quale frate Luca si rivolge a Guidubaldo da Montefeltro, descrivendo lo scopo e l'utilità di questo libro per i mercanti.

> "Li reverenti subditi de Vostra Dominatione Serenissima, Magnanimo Duca, aciò a pieno de tutto l'ordine mercantesco habino el bisogno, deliberai (oltra le cose dinanze in questa nostra opera ditte) ancora particular tractato grandemente necessario compillare, e in questo solo l'ò inserto, perché, a ogni loro occurrenza, el presente libro li possa servire, sì del modo a conti e scripture, commo de ragioni. E per esso intendo darli norma sufficiente e bastante in tenere ordinatamente tutti lor conti e libri" (c. 198v).

La corretta registrazione dei conti e la scrittura dei libri contabili è, infatti, uno dei tre requisiti fondamentali per essere un buon mercante. Gli altri due, come si evince dal primo dei 36 capitoli del trattato XI, consistono nel possedere "pecunia numerata e ogni altra facultà substantiale" (cioè un capitale da investire); ed essere "buon ragionieri e prompto computista".

È opportuno a questo punto un preliminare chiarimento terminologico: frate Luca usa il termine ragioniere come sinonimo di "computista", cioè di colui che risolve problemi matematici. Per conseguire l'abilità tecnica del ragioniere – dice Luca dal Borgo – "di sopra commo s'è veduto, dal principio a la fine havemo inducto regole e canoni a ciascuna operatione requisiti, in modo che da sé ogni diligente lectore tutto potrà imprendere". Il ragioniere è pertanto il buon matematico, che padroneggia le regole dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria. Quando oggi ci si riferisce a Pacioli come al padre della ragioneria non si allude allo stesso significato di "ragioniere" specificato dal frate di Sansepolcro ma alla disciplina esposta prevalentemente nel trattato XI sulle scritture contabili, contenuto nella nona distinzione. A questa parte della *Summa* Luca dal Borgo, però, non dà il nome di "ragioneria" ma parla semplicemente di "debito ordine de scripture" necessario affinché si possa "con debita diligentia mercantare".

L'ordine dei conti e delle scritture è indispensabile per il mercante poiché – precisa Pacioli - "non asettando le cose debitamente a li suoi luoghi, verebbe in grandissimi travagli e confusioni de tutte sue facende, iuxta comune dictum ubi non est ordo ibi est confusio". La necessità di mantenere l'ordine dei conti nasceva prevalentemente dall'elevato numero di investimenti dei singoli mercanti, ma anche dallo svillupo di compagnie e società a partecipazione congiunta di diversa natura che obbligavano i singoli soci a seguire con scrupolo ed esattezza l'andamento degli affari mediante registrazioni meticolose delle transazioni. Lo scopo principale della scrittura contabile era quello di valutare in ogni momento i profitti in funzione degli investimenti. In base al tipo di attività economica quindi si svilupparono diversi tipi di registrazioni contabili. I manifattori tessili fiorentini, ad esempio, strutturavano i loro libri mastri dividendo le scritture in voci riguardanti il conto salari, il conto lana o cotone, il conto vendite panni e così via, in modo che si potessero calcolare i profitti con la chiusura dei conti a intervalli più o meno regolari. Nella contabilità industriale di un'azienda manifatturiera fiorentina, come poteva essere quella dei Medici, il conto salari si chiudeva nelle spese di manifattura e queste nella vendita delle stoffe. Dalla chiusura dei conti veniva fuori il guadagno dell'impresa, considerata nel suo complesso. I mercanti veneziani, invece, adoperavano un diverso tipo di contabilità, dato che le loro imprese commerciali erano indipendenti l'una dall'altra.

I veneziani, che erano soprattutto importatori ed esportatori, non adottavano una contabilità "industriale" come i fiorentini ma per ogni merce trafficata aprivano un conto spedizione e un conto mercanzie ricevute. Il calcolo dei profitti non avveniva con la chiusura regolare dei libri mastri per tutte le merci trafficate ma con la valutazione dei guadagni e delle perdite per ogni singola impresa commerciale, sulla base del conto spedizione e del conto mercanzia ad essa relativi.

Oltre al calcolo dei profitti le registrazioni contabili svolgevano tuttavia anche una funzione di controllo pubblico degli affari, dal momento che spesso venivano adoperate in tribunale come prove per dirimere controversie tra mercanti. In particolare dal momento in cui il mercante viaggiatore fu gradualmente sostituito da quello residente, che dirigeva i suoi affari in Levante e Ponente mediante agenti commissionari, la registrazione contabile alla veneziana poteva fornire un utile strumento di controllo dell'operato dell'agente. Questi, infatti, era tenuto a redigere libri contabili dai quali doveva risultare, per ogni partita di merci spedite al suo principale o a lui pervenuta, le spese di gestione, i costi del trasporto, delle tasse doganali dei noli, i prezzi di vendita o acquisto sul mercato estero nel quale operava. Il mercante residente spesso rischiava di essere truffato dall'agente ma poteva controllare l'operato del suo commissionario mediante lettere commerciali sui prezzi in quel determinato mercato estero, manuali e tariffe mercantesche, come quella che Pacioli riporta nella *Summa*, e informazioni di natura commerciale reperibili soprattutto nelle piazze affari come quella di Rialto. Se le discrepanze tra i libri dell'agente e le informazioni ricevute dal mercante residente erano lievi, il principale poteva decidere se continuare a fidarsi del suo corrispondente o incaricare qualcunaltro di tenere i suoi affari all'estero. In caso di gravi errori spesso si finiva in tribunale e in tali occasioni i libri contabili diventavano la parte più importante delle prove addotte dall'accusa e dalla difesa. La scrittura di questi libri era pertanto di notevole rilevanza giuridica oltre che economica, e non a caso Pacioli ricorda nel suo trattato la consuetudine perugina di autenticare i registri davanti al notaio, al fine di garantire la loro validità legale.

A prescindere dalla questione se la registrazione a partita doppia abbia o meno favorito lo sviluppo commerciale e la mentalità affaristica dei mercanti veneziani, resta comunque un fatto storico che essa costituì un elemento fondamentale della strumentazione tecnica del mercante del Medioevo e del Rinascimento. La pratica mercantesca della registrazione contabile era già in uso da diversi secoli prima dell'edizione della *Summa*. I documenti più antichi di registrazione a partita doppia risalgono agli inizi del XIV secolo e riguardano le registrazioni di una partita di pepe a Genova. I più celebri esempi di pratica di questa tecnica contabile tuttavia sono costituiti dai libri mastri veneziani dei fratelli Soranzo, di Giacomo Badoer e di Andrea Barbarigo. Se si trascurano le differenze di impostazione fra questi libri, resta comunque una stessa implicita struttura teorica alla base della partita doppia, fondata sull'idea che l'ordine e la completezza dei dati potesse facilitare la stima dei profitti e l'organizzazione degli affari. L'ordine, al quale tanto spesso frate Luca allude, è costituito appunto dal tipo di scrittura che prevede per ogni addebito la registrazione di un accredito; ma l'ordine della scittura è anche il portato applicativo dell'ordine calcolistico del mercante. La concatenazione delle partite del dare e dell'avere costituisce, infatti, oltre che un modo per stabilire i guadagni e le perdite anche lo strumento che meglio incarna la mentalità e la cultura organizzativa del mercante del Medioevo e del Rinascimento. Tale cultura tuttavia si esprimeva prevalentemente al livello della pratica e occorrerà attendere la *Summa* per trovare una seria codificazione scritta di questo saper fare del mercante.

Se frate Luca non è l'inventore della partita doppia, è senza dubbio il primo a tentare una presentazione teorica dell'argomento e a fornire una descrizione sistematica del metodo veneziano. Ma quale è per l'autore della *Summa* la funzione precipua della registrazione contabile alla veneziana? Si presuppone – afferma frate Luca – che che "el fine de qualunche traficante è de consequire licito e competente guadagno per sua substentatione". Un mezzo per valutare quanto si guadagna è appunto la scrittura nei registri contabili secondo "el modo de Vinegia", e pertanto risulta indispensabile valutare prima di tutto il capitale in denaro e immobili che il mercante possiede in un determinato momento e poi calcolare gli eventuali profitti e perdite.

Schedare tutti i beni è quindi la prima operazione di scrittura del buon mercante; ma è ben più importante la seconda e cioè la "disposizione" dei conti, e cioè la registrazione dei crediti e dei debiti nei tre "libri principali del corpo mercantesco": 1) il "memoriale", 2) il giornale, e 3) il quaderno o "libro mastro".

Nel primo "tutte faccende sue el mercatante, piccole o grandi che a man li vengano, o giorno per giorno e ora per ora iscrive". Il memoriale quindi si configura come un registro di prima memoria nel quale il mercante o li "fattori, garzoni, le donne (se sanno) in absenza l'un de l'altro" possono annotare dettagliatamente tutti i fatti aziendali con i relativi importi anche in diverse monete. I vari memoriali che via via vengono compilati sono contrassegnati da lettere in ordine alfabetico. Il giornale invece è il "libro secreto" del mercante sul quale viene annotata, "in capo de 4 o 5 overo 8 giorni", ogni operazione registrata sul memoriale, ma in modo da specificare sinteticamente mercanzia, numero, peso e misura, valore e periodo entro il quale le merci devono essere comprate o vendute, condizioni finanziarie e persone interessate. Per ogni tipo di operazione si registrano le "partite" con due "termini": "l'un è ditto Per e l'altro è ditto A [...] Per lo "Per" sempre si dinota el debitore [...] e per lo A si dinota lo creditore". La registrazione sul giornale è quindi ordinata e tecnicamente più precisa di quanto accade sul memoriale. Pacioli, a questo proposito, introduce nel capitolo 12° "doi altri termini, l'uno ditto cassa, e l'altro ditto cavedale".

“Per la cassa – precisa frate Luca – s’intende la tua partita overo borscia; per lo cavedale se intende tutto el tuo monte e corpo de facultà presente, el quale cavedale, in tutti li principii de’ quaderni e giornali mercanteschi, sempre dev’essere posto creditore, e la ditta cassa sempre dev’essere posta debitrici, e mai per nullo tempo nel manegio mercantesco la cassa pò essere creditrici, ma solo debitrici, overo para. Però che quando nel bilancio del libro si trovasse creditrici, denotarebbe errore nel libro.

Mediante i conti cassa e capitale vengono registrate tutte le partite dell’inventario, e cioè i contanti, i gioielli, gli argenti, le vesti preziose, le stoffe, i letti, le merci in magazzino e “tutte l’altre partite de quel’altre robbe, de ciascuna faciendo sua partita separata” .

Il contabile poi riporta sul quaderno o libro mastro le partite di debito e credito del giornale, adoperando sempre l’ordine alfabetico nel contrassegnare i diversi libri contabili al fine di controllare tutte le partite registrate. A differenza del giornale, il quaderno raggruppa le voci in base alla mercanzia, alla ditta ecc., in modo da tenere nota generale e accorta di tutti gli affari e a questo proposito è dotato di una rubrica. Al conto cassa, sul quale si interviene maggiormente, si lascia ampio spazio e ogni facciata è rigata “de tante righe quante che sorte de monete voli trar fore”. Le righe verticali, oltre a facilitare i conti, servono anche da guida per la trascrizione della data e del “numero de le carti de le partite, che insiemi de’ dare e havere se incatenano”, in modo da poter facilmente risalire dal numero di carta indicato alla corrispondente registrazione del giornale.

I tre libri contabili costituiscono gli strumenti con i quali il mercante può dirigere la rotta dei suoi affari e pertanto devono riportare con ordine tutti i dati relativi alle maggiori partite che capitano nel “maneggio traficante”, come sono “li baratti e le compagnie, viaggi recomandati, viaggi in sua mano, commissione havute per altri, banchi de scritta over ditta, cambi reali, conto de botega, etc”. Per ognuna di queste partite Pacioli insegna ad aprire un conto cassa e un conto capitale in modo da controllare avanzi e disavanzi, utile e danno, ovvero profitti e perdite relativi a ciascuna impresa. A prescindere dal bilancio d’esercizio complessivo e dalla chiusura periodica dei conti, la scrittura di ogni singola partita poteva fornire un’idea chiara sulla riuscita di un affare e quindi orientare le successive scelte aziendali del mercante.

Si capisce, pertanto, alla luce del trattato XI della nona distinzione della *Summa*, il motivo per il quale l’arte del mercante fosse tanto strettamente connessa a quella della scrittura. Dei tre elementi necessari “a chi vole con debita diligentia mercantare”, la contabilità costituisce, infatti, il criterio d’ordine e il metodo razionale di conduzione degli affari.

“La terza e ultima cosa oportuna – aveva scritto frate Luca all’inizio del trattato – si è che con bello ordine tutte sue facende debitamente disponga, aciò con brevità possa de ciascuna haver notitia, quanto a lor debito e anche credito, che circa altro non s’atende al trafico. E questa parte fra l’altre è a loro utilissima, ché in lor facende altramente regerse seria impossibile senza debito ordine de scripture, e senza alcun reposo la lor mente staria in gran travagli”.

Alla pratica mercantesca della scrittura contabile Pacioli conferisce per primo la dignità di un discorso scientifico, e anche se la parte teorica del trattato XI si limita a descrivere più che a spiegare, a ragione il frate di Sansepolcro può essere considerato l’iniziatore della disciplina che attualmente prende il nome di “ragioneria”.

Non a caso sulla scia della *Summa* verranno compilati quasi tutti i manuali di ragioneria e registrazione a partita doppia del Cinquecento, tra i quali occorre menzionare il *Quaderno doppio* di Domenico Manzoni, pubblicato per la prima volta a Venezia nel 1540, la *Nieuwe instructie* di Jan Ympyn uscito contemporaneamente in fiammingo e francese ad Anversa nel 1543, lo *Specchio lucidissimo* di Alvise Casanova (Venezia 1558) e *A brief Instruction* di John Mellis, pubblicata a Londra nel 1588, che riproduceva con modifiche ed aggiunte il trattato di Hugh Oldcastle del 1543. Tutte queste opere, che segnano l’inizio della ragioneria come scienza, sono debitrici in modo più o meno esplicito della *Summa* di Pacioli, il libro a partire dal quale una pratica mercantesca si avviava a diventare disciplina scientifica.

6 - Il “Compendium de divina proportione” (1498).

Quattro anni dopo la pubblicazione della *Summa,* Pacioli aveva già terminato il *Compendium de divina proportione* e lo presentava alla corte di Ludovico il Moro. Milano sforzesca pullulava di artisti, letterati e umanisti, che ruotavano intorno alla corte del Moro. È proprio alla corte di Ludovico Sforza che il 9 febbraio 1498 si svolge lo “scientifico duello” di cui parla Pacioli nell’epistola dedicatoria dell’opera sulla divina proporzione. A questo incontro intellettuale partecipano personaggi “celeberrimi e sapientissimi” sia “religiosi” sia “seculari”. Tra i primi frate Luca ricorda il “theologo maestro Gometio”, Frate Domenico Ponzone e il reggente del convento francescano di Milano Francesco Busti. Tra i laici invece spicca il nome di Galeazzo Sanseverino, generale di Ludovico il Moro, e – come sottolinea Luca dal Borgo – "capitano nell'armi hoggi a niun secondo, e de nostre discipline solerto immitatore". Emergono inoltre le figure di "egregii oratori et de la medicina e astronomia supremi", come l'astrologo Ambrogio Rosa, i medici Alvise Marliano e Gabriele Pirovano, Nicolò Cusano e Andrea Novarese. Oltre ai dotti, "religiosi" e "seculari", partecipano anche "perspicacissimi architecti e ingegneri e di cose nuove assidui inventori", fra i quali si distingue "Leonardo da Vinci, compatriota nostro fiorentino, qual de sculptura, getto e pictura con ciascuno el cognome verifica". Con Leonardo inizia subito un sodalizio intellettuale estremamente fecondo per entrambi. L'artista impara la geometria e l'algebra da Pacioli, il quale, una volta terminata la *Divina proportione*, può inserire nel manoscritto le tavole dei poliedri regolari disegnate dal pittore amico e conterraneo. Oltre a Leonardo, frate Luca annovera tra gli artisti ed architetti "Iacomo Andrea da Ferrara, de l'opere de Vitruvio acuratissimo settatore", ed esperto ingegnere militare. Intorno a Giacomo Andrea da Ferrara, peraltro imparentato con lo stesso Leonardo, si coagulano gli studi vitruviani a Milano, dai quali Pacioli, che pubblicherà nel 1509 un *Tractato de l'architectura*, è sicuramente attratto.

"Grandamente eccitato" dalle "auree e melliflue parole" del Duca, pronunciate in occasione di quello "scientifico duello" per elogiare coloro che si impegnavano a divulgare le scienze, Luca dal Borgo dice di essere tornato alla "plagia diserta" delle matematiche per comporre, dopo le fatiche della *Summa* , il "breve compendio e utilissimo tractato" sulla divina proportione. L'opera, pensata come "perfecto ornamento" della "dignissima biblioteca" sforzesca, si rivolge a "tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi", interessati alla filosofia, alla pittura, scultura, architettura, musica e alle altre discipline matematiche. Essa, infatti, oltre a risultare "utilissima" nelle applicazioni pratiche, presenta "varie questione de secretissima scientia" che invitano l'intelletto a percorrere i sentieri nascosti di una "suavissima, sottile e admirabile dottrina", che è quella dei 13 "mirabili effetti" della "proportione havente el mezzo e doi extremi". Il libro, infine, è degno di "non minore admiratione" per il fatto che contiene la trattazione dei cinque corpi regolari, le cui "forme ali viventi fin hora ascoste", acquistano per la prima volta una loro "visibile" configurazione spaziale proprio nelle tavole disegnate da Leonardo.

Dell'opera furono compilate almeno tre copie manoscritte: la prima, dedicata al Duca di Milano Ludovico il Moro, è conservata presso la Bibliothèque Publique et Universitaire di Ginevra (ms. Langues Etrangères n. 210); la seconda, donata da Pacioli a Giangaleazzo Sanseverino, è custodita presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano (ms. 170 sup.); la terza, offerta a Pietro Soderini, è andata perduta.

Il *Compendium* del 1498 può essere diviso in quattro sezioni, abbastanza distinte per il contenuto, lo stile matematico e per i disegni geometrici che accompagnano il testo. Nella prima, di contenuto filosofico e teologico, dopo aver celebrato l'utilità, la certezza e la necessità delle matematiche per tutte le arti e le scienze (cap. 2), Pacioli propone di inserire la prospettiva tra le discipline matematiche in virtù dell'uso che in essa si fa delle proporzioni (cap. 3). Ad un capitolo propedeutico in cui Luca dal Borgo appronta un dizionario essenziale di termini matematici più ricorrenti (cap. 4) segue poi un discorso a metà strada tra matematica e metafisica inerente alla "divina proportione" e alle ragioni che legittimano l'uso dell'aggettivo divina (cap. 5-7).

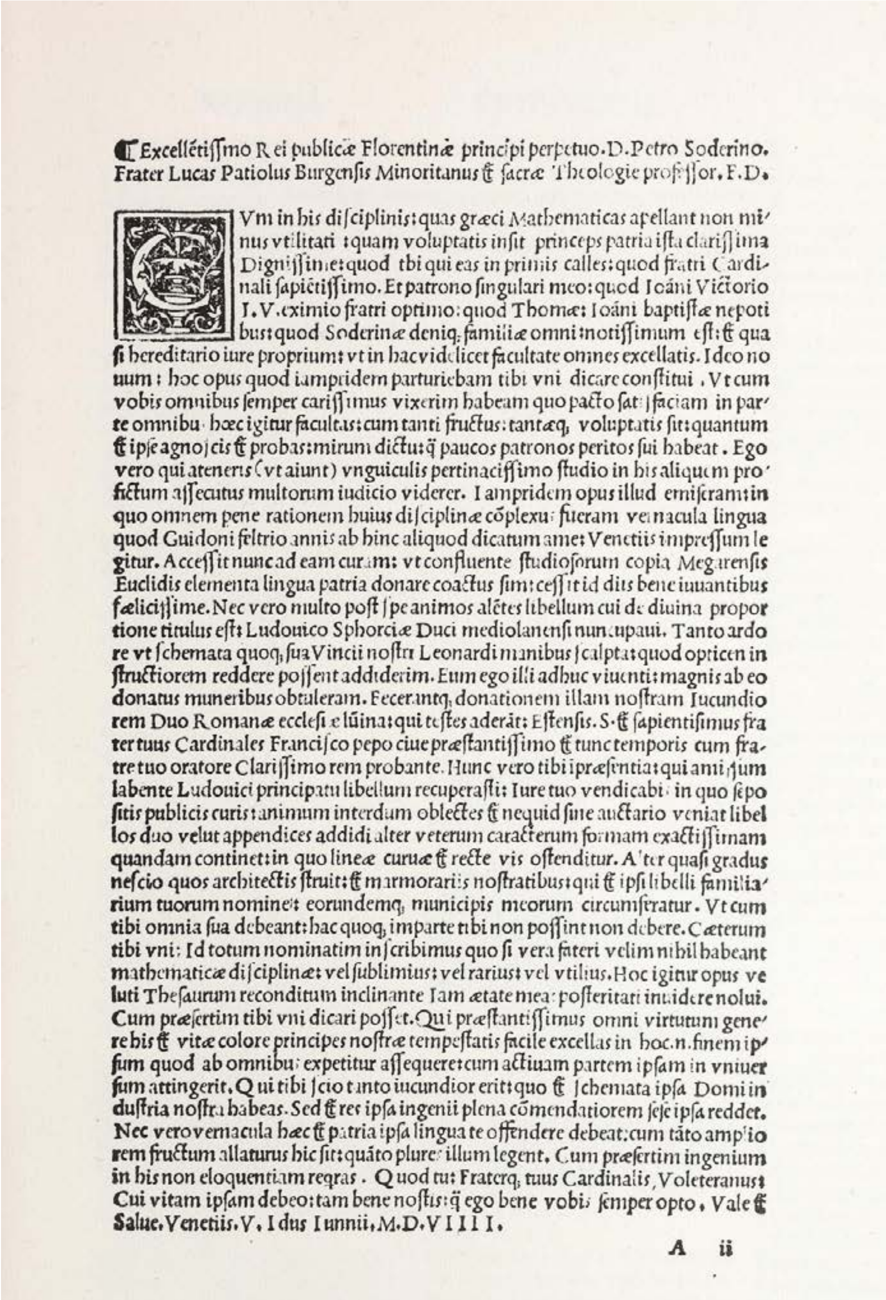
Fig. 29- *Compendium de divina proportione*,
Bibliothèque Publique et Universitaire di Ginevra (ms. Langues Etrangères n. 210),
miniatura: il frate del Borgo nell'atto di presentare il manoscritto a Ludovico il Moro

Nella seconda parte frate Luca volgarizza, mediante un linguaggio aritmetico ed algebrico, il libro XIII degli *Elementi* di Euclide, attribuendo prima 13 "mirabili effetti" alle proposizioni euclidee concernenti la divina proporzione (cap. 8-23), e mostrando poi come queste proprietà concorrano nella genesi dei 5 corpi regolari a partire dal diametro della sfera che li contiene (cap. 24-31). Questa seconda parte, nella quale il testo di Euclide viene aritmetizzato e colorato di tinte metafisiche, si conclude con un compendio dei libri spuri degli *Elementi*, il XIV e il XV, nei quali si mostrano le proporzioni tra volumi e superfici dei poliedri regolari (cap. 32-33) e le loro reciproche inscrizioni (cap. 34-47). Dell'opera di Euclide vengono riportate soltanto poche dimostrazioni di teoremi, accompagnate comunque da disegni di geometria ricalcati sull'edizione del Campano.

Nella terza parte lo stile matematico cambia radicalmente (cap. 48-62). Pacioli si limita alla descrizione dei corpi "regulari e dependenti", indicando il numero degli spigoli e degli angoli solidi che concorrono a formare ciascun poliedro. La traccia degli *Elementi* di Euclide scompare del tutto e il significato del testo si evince soprattutto dalle 60 tavole, disegnate da Leonardo, che raffigurano i poledri sia nella forma "solida" sia in quella "vacua". È questa la sezione in cui si trovano anche i solidi cosiddetti "archimedei" e i poliedri stellati derivanti dai cinque corpi regolari. In questa parte dell'opera le dimostrazioni geometriche lasciano spazio alle considerazioni filosofiche e cosmologiche derivanti dal *Timeo* di Platone e ai metodi empirici che consentono ad uno scalpellino di ricavare i poliedri da sfere di pietra.

La quarta parte del *Compendium de divina proportione* ha in comune con la terza il registro grafico (cap. 63-69). Le tavole relative ai "corpi oblonghi" cioè a piramidi, coni e parallelepipedi, si collocano, infatti, sulla scia di quelle riguardanti i poliedri. Ciò nondimeno Pacioli adotta per questi capitoli uno stile abachistico anziché euclideo, e pertanto fornisce sempre per ogni tipo di solido la regola pratica per calcolare la superficie e il volume, esemplificandola talvolta con un caso numerico.

L'opera, pertanto, si presenta come un coacervo di tradizioni e stili matematici diversi. Più che nel mondo dei matematici veri e propri essa sarà accolta e recepita dagli ambienti artistici e tecnici. Il suo successo nel Cinquecento è testimoniato da opere d'arte, come le tarsie geometriche di Fra' Giovanni da Verona, da trattati di teoria artistica come quelli di Albrecht Dürer e Daniele Barbaro, e da prodotti di alto artigianato ispirati ai poliedri, come accade fra gli orafi di Norimberga, fra i costruttori di orologi poliedrici e fra i tipografi.



Excellētissimo Rei publicæ Florentinæ principi perpetuo. D. Petro Soderino.
Frater Lucas Patiolus Burgensis Minoritanus & sacræ Theologie professor. F. D.

CVm in his disciplinis: quas græci Mathematicas apellant non mi-
nus vtilitati: quam voluptatis insit princeps patria ista clarissima
Dignissime: quod tibi qui eas in primis calles: quod fratri Cardi-
nali sapiētissimo. Et patrono singulari meo: quod Ioāni Victorio
I. V. eximio fratri optimo: quod Thomæ: Ioāni baptistæ nepoti
bus: quod Soderinæ deniq; familiæ omni: notissimum est: & qua
si hereditario iure proprium: vt in hac videlicet facultate omnes excellatis. Ideo no
uum: hoc opus quod iampridem parturiebam tibi vni dicare constitui. Vt cum
vobis omnibus semper carissimus vixerim habeam quo pacto satisfaciam in par-
te omnibus. hæc igitur facultas: cum tanti fructus: tantæq; voluptatis sit: quantum
& ipse agnoscis & probas: mirum dictu: q̄ paucos patronos peritos sui habeat. Ego
vero qui a teneris (vt aiunt) vnguiculis pertinacissimo studio in his aliquem pro-
fictum assecutus multorum iudicio viderer. Iampridem opus illud emiseram: in
quo omnem pene rationem huius disciplinæ cōplexus fueram vernacula lingua
quod Guidoni feltrio annis ab hinc aliquod dicatum a me: Venetiis impressum le
gitur. Accessit nunc ad eam curam: vt confluente studiosorum copia Megarensis
Euclidis elementa lingua patria donare coactus sim: cessit id diis bene iuuantibus
fælicissime. Nec vero multo post spe animos alētes libellum cui de diuina propor
tione titulus est: Ludouico Sphorciæ Duci mediolanensi nuncupaui. Tanto ardo
re vt schemata quoq; sua Vincii nostri Leonardi manibus scalpta: quod opticen in
structiorem reddere possent addiderim. Eum ego illi adhuc viuenti: magnis ab eo
donatus muneribus obtuleram. Fecerantq; donationem illam nostram Iucundio
rem Duo Romanæ ecclesiæ lūina: qui testes aderāt: Estensis. S. & sapientisimus fra
ter tuus Cardinales Francisco pepo ciue præstantissimo & tunc temporis cum fra-
tre tuo oratore Clarissimo rem probante. Hunc vero tibi i præsentia: qui ami[il]sum
labente Ludouici principatu libellum recuperasti: Iure tuo vendicabis in quo sepo
sitis publicis curis: animum interdum oblectes & nequid sine auctario veniat libel
los duo velut appendices addidi alter veterum caracterum formam exactissimam
quandam continet: in quo lineæ curuæ & recte vis ostenditur. Alter quasi gradus
nescio quos architectis struit: & marmorariis nostratibus: qui & ipsi libelli familia-
rium tuorum nomine: et eorundemq; municipis meorum circumferatur. Vt cum
tibi omnia sua debeant: hac quoq; imparte tibi non possint non debere. Cæterum
tibi vni: Id totum nominatim inscribimus quo si vera fateri velim nihil habeant
mathematicæ disciplinæ: vel sublimius: vel rarius: vel vtilius. Hoc igitur opus ve
luti Thesaurum reconditum inclinante Iam ætate mea: posteritati inuidere nolui.
Cum præsertim tibi vni dicari posset. Qui præstantissimus omni virtutum gene-
re his & vitæ colore principes nostræ tempestatis facile excellas in hoc. n. finem ip-
sum quod ab omnibus expetitur assequere: cum actiuam partem ipsam in vniuer
sum attingerit. Qui tibi scio tanto iucundior erit: quo & schemata ipsa Domi in
dustria nostra habeas. Sed & res ipsa ingenii plena cōmendatiorem sese ipsa reddet.
Nec vero vernacula hæc & patria ipsa lingua te offendere debeat: cum tāto amplio
rem fructum allaturus hic sit: quāto plures illum legent. Cum præsertim ingenium
in his non eloquentiam reqras. Quod tu: Fraterq; tuus Cardinalis, Voleteranus:
Cui vitam ipsam debeo: tam bene nostis: q̄ ego bene vobis semper opto. Vale &
Salue. Venetiis. V. Idus Iunnii. M. D. VIIII.

A ii

Fig. 30 – Luca Pacioli, *Compendium de divina proportione,* dedica a Pier Soderini

7 - L'edizione a stampa della «Divina proportione»: il «Tractato de l'architectura», il «Libellus» di Piero, e l'«Alfabeto dignissimo» (1509)

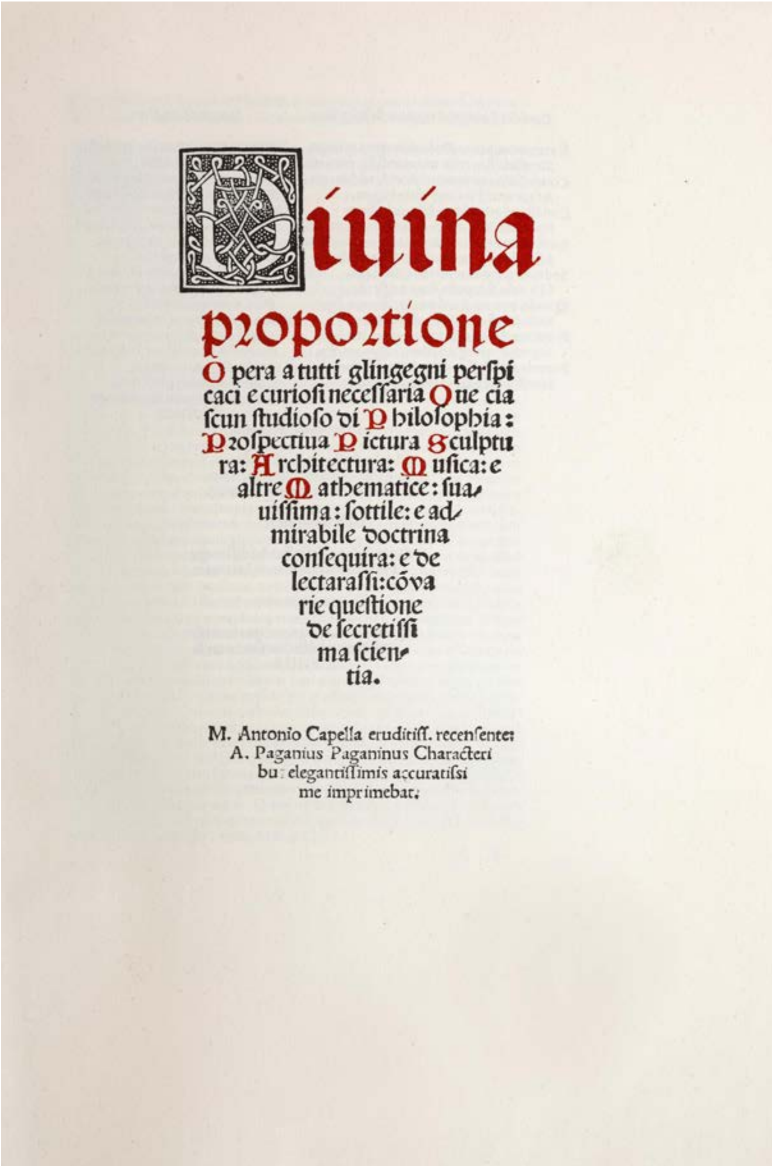
Nell'edizione veneziana del 1509 il *Compendium de divina proportione* è seguito, anche nella numerazione delle pagine, da un *trattato di architettura* dedicato da frate Luca Pacioli, "ordinis Minorum et sacre theologie professor", "ali suoi cari discipuli e alievi Cesaro del Saxo, Cera del Cera, Rainer Francesco del Pippo, Bernardino e Marsilio da Monte e Hieronymo del Secciarino e compagni del Borgo San Sepuclro, degni lapicidi, de sculptura e architectonica facultà solertissimi sectatori".

Pacioli maturò le sue convinzioni architettoniche probabilmente già nell'ambiente urbinate, a contatto con Piero della Francesca, Luciano Laurana e Francesco di Giorgio Martini. Il palazzo ducale di Federico da Montefeltro, infatti, rappresentava, non soltanto una prova pratica della nuova architettura, ma anche il luogo di nascita di una disciplina da porsi al vertice non solo delle arti ma di ogni attività intellettuale, in quanto essa veniva considerata come scienza "in primo gradu certitudinis", per usare i termini contenuti nella patente concessa da Federico al Laurana.

A Urbino l'influenza delle teorie di Leon Battista Alberti era notevole, soprattutto durante la seconda fase di costruzione del palazzo ducale (1472-80), affidata a Francesco di Giorgio Martini. Pacioli, che dell'Alberti aveva fatto conoscenza personale a Roma nel 1470-1471, risentì nel suo *Tractato de l'architectura*, anche delle teorie albertiane. Ciò nondimeno l'autore che ispirò direttamente il suo trattatello fu senza dubbio Vitruvio, del quale frate Luca riportò diversi brani in latino, tratti dal terzo e quarto libro del *De architectura*, accompagnati da una libera volgarizzazione che tendeva ad attualizzare il contenuto dell'opera con continui riferimenti agli edifici dell'architettura rinascimentale da prendere ad esempio. Gli indizi testuali contenuti nel *Tractato de l'architettura* consentono di determinare la fonte dalla quale Pacioli ha tratto le sue citazioni dell'opera di Vitruvio: non si tratta di un manoscritto ma dell'edizione a stampa del *De architectura*, pubblicata a Firenze nel 1496.

Pacioli probabilmente aveva già studiato il *De architectura* frequentando la cerchia romana del cardinal Riario e di Sulpicio Verulamio, curatore dell'editio princeps di Vitruvio nel 1486, ma approfondì la sua conoscenza dell'opera vitruviana soprattutto nella corte di Ludovico il Moro. Nella Milano di fine secolo lavoravano oltre a Leonardo da Vinci, architetti come

Bramante, Francesco di Giorgio e Giuliano da Sangallo, dai quali Pacioli poteva trarre esempi pratici e spunti teorici per l'applicazione dei canoni vitruviani.


Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspi
caci e curiosi necessaria Oue cia
scun studioso di Philosophia:
Prospectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Musica: e
altre Mathematice: sua-
uissima: sottile: e ad-
mirabile doctrina
consequira: e de
lectarassi: cō va
rie questione
de secretissi
ma scien-
tia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente:
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantissimis accuratissi
me imprimebat.

Fig. 31 – Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, Paganino de' Paganini, Venezia, 1509 (ed a stampa), Frontespizio

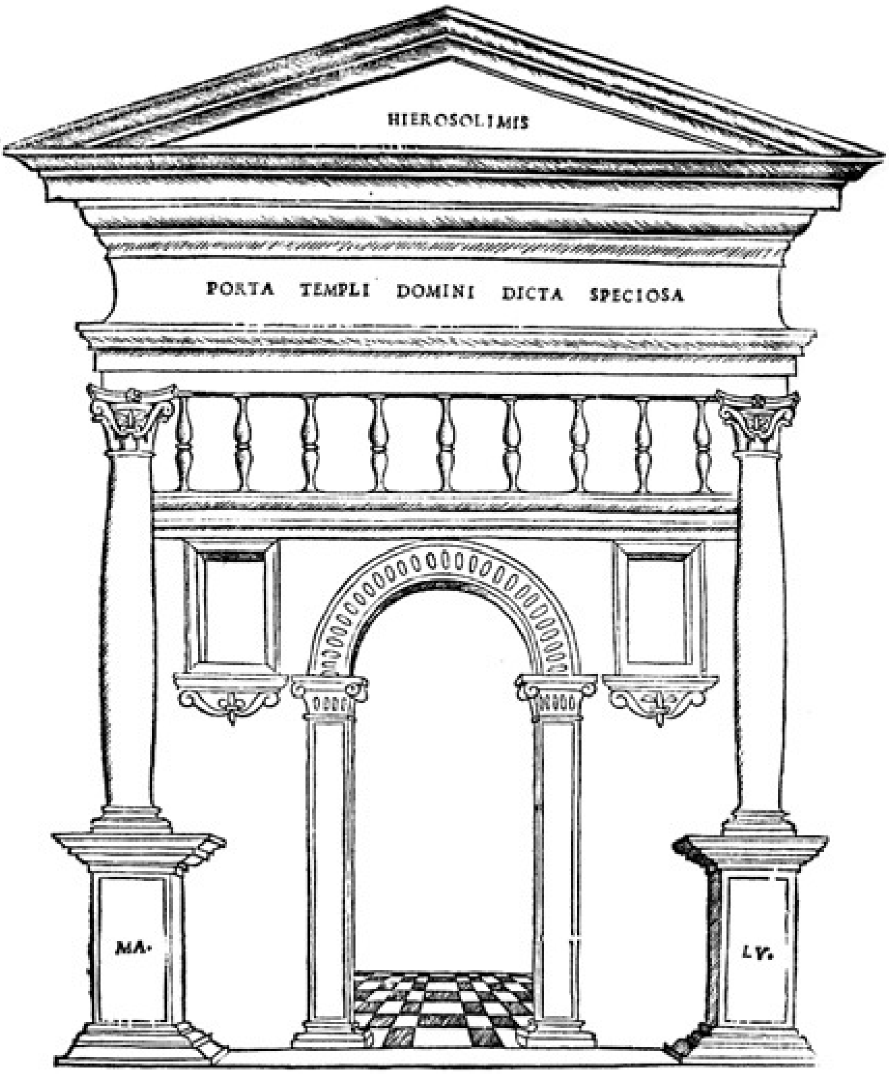


Fig. 32 – Luca Pacioli, *Tractato de l'Architectura*, La porta speciosa, in *De Divina Proportione*, Venezia, Paganino de' Paganini, 1509

Che Vitruvio fosse l'autorità architettonica principale nell'ambiente del Moro lo attesta Cesare Cesariano, autore di una celebre traduzione volgare del *De architectura*, corredata da un ampio e articolato commento. Il Cesariano, pur dando alle stampe l'opera di Vitruvio soltanto nel 1521 a Como, espone in gran parte dottrine e teorie maturate nella Milano sforzesca di fine secolo. Non a caso, ricorda tra i suoi maestri "il mio preceptore Donato, cognominato Bramante, urbinate", tirato in ballo nel commento al passo vitruviano inerente alla formazione culturale dell'architetto, ed in particolare all'importanza della geometria nell'architettura. Oltre a Bramante, compare anche il nome di frate Luca, in relazione all'aritmetica e all'algebra.

"Ma le difficultà che talhora occurreno in queste & in le geometrice ratione, facilmente con le methode; idest con le vie breve seu ratione naturale; commo saria per la via del algebra, sì quale da Euclide poi havere. Et anchora da frate Luca dal Borgo Sancto Sepulcro" (C. Cesariano, *Di Lucio Vitruvio Pollione de Architectura Libri Dece, traducti de latino in vulgare, …,* Como, 1521, c. 4v).

Pacioli, del resto, è l'intellettuale di raccordo fra gli architetti teorici e i tecnici costruttori, colui che inserisce la teoria vitruviana all'interno della visione matematica del mondo contenuta nel *Compendium de divina proportione*, e non fosse altro che per questa funzione merita una certa attenzione come teorico dell'architettura.

Il trattatello pacioliano può essere diviso in tre sezioni tematiche: la prima (cap. I-III), di tipo teorico, descrive "la humana proportione respetto al suo corpo e membri, peroché dal corpo humano ogni mesura con sue denominationi deriva e in esso tutte sorti de proportioni e proportionalità se ritrova"; la seconda (cap. IV-IX) illustra i diversi tipi di colonne in funzione delle proporzioni del corpo umano; la terza, infine (cap. X-XIX), descrive l'architrave, e riassume tutti gli elementi architettonici in una "porta qual fia a similitudine di quella del tempio de Salamone in Ierusalem".

Il filo conduttore del trattato è costituito dalle proporzioni, cioè dai rapporti che presiedono alla creazione del corpo umano da parte di Dio, e alla costruzione degli edifici per opera dell'uomo. La proporzione è, del resto, il nucleo intorno al quale viene organizzato anche il restante materiale che compone il volume del 1509.

La seconda parte dell'edizione a stampa della *Divina proportione* ha uno stile matematico completamente differente dalla prima. A segnare lo stacco con il resto del volume contribuisce, inoltre, la numerazione dei fogli che ricomincia da capo. L'opera contenuta in questa sezione dell'edizione veneziana del 1509 prende il titolo di *Libellus in tres partiales tractatus divisus,* e contiene una raccolta di 140 problemi di geometria piana e solida, dei quali 59 riguardano i poliedri. Pacioli, nel presentare la seconda parte dell'opera, mette a fuoco l'oggetto di maggiore interesse contenuto nel *Libellus:* i 5 corpi regolari. Dopo aver esposto quali sono e perché sono definiti tali, afferma:

"e poi diremo de dicti corpi e alcuna cosa del corpo sperico, su brevità de le quali cose farò 3 tractatelli. Pel primo se dirà de lati e superficie de le base. Pel secondo de' corpi laterati le superficie e quadrature loro. Pel terzo delli corpi tenuti l' uno da l' altro e qualche cosa de la spera se piacerà a Dio".

In realtà il *Libellus*, malgrado il titolo con il quale è presentato, è composto di quattro trattati, anche se l'ultimo non è fornito di intestazione come i precedenti. Il quarto trattato ha un contenuto eterogeneo: si va dal corpo di 72 basi a casi di geometria piana, dai poliedri semiregolari al volume delle botti, da problemi sulla volta a crociera al calcolo del volume di una statua, mediante la variazione di livello dell'acqua contenuta in una vasca dopo l'immersione della statua stessa.

Il *Libellus* edito da Pacioli nell'edizione del 1509 della *Divina proportione,* com'è noto, è la versione volgare del *Libellus de quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca, che si conserva in un'unica copia manoscritta, il codice Vaticano Urbinate Latino 632. L'opera presenta analogie e differenze col *Trattato d'abaco* dello stesso Piero. Da una parte, infatti, si può rilevare come 88 dei 140 problemi del *Libellus* siano già presenti nel precedente libro del pittore. Il taglio della trattazione quindi risulta sostanzialmente allineato con le caratteristiche delle scuole d'abaco: i problemi, perciò, vengono risolti per via aritmetica e algebrica anziché geometrica. Dall'altra parte non può non balzare agli occhi la novità strutturale del *Libellus,* che, rispetto alla tradizione abachistica, tende ad avvicinarsi al canone euclideo.

L'uso degli *Elementi* in questo libro non si limita ad una semplice applicazione pratica dei teoremi di geometria piana e solida, ma testimonia una conoscenza raffinata del testo di Euclide. La struttura espositiva quasi euclidea e il contenuto del *Libellus,* caratterizzato da un argomento – i poliedri regolari – quasi sconosciuto dalla tradizione abachistica, segnano uno stacco rispetto allo stesso *Trattato d'abaco,* collocando quest'operetta alla frontiera tra matematica pratica e matematica dotta.

Il *Libellus,* che nell'unico esemplare pervenutoci - il Codice Vaticano Urbinate Latino 632 - si presenta nella veste nobile della lingua dei dotti, mantiene comunque le caratteristiche genetiche dell'abachismo, e dell'uso dell'algebra nella soluzione di questioni geometriche. Pertanto Piero può essere valutato più come abachista euclideo che come geometra euclideo contaminato dall'abachismo. E questo lo si può vedere anche nella funzione che hanno i 174 disegni all'interno del *Libellus.* Alcuni, secondo il modello euclideo, sono per così dire in "corrispondenza biunivoca" col testo, nel senso che illustrano il testo e allo stesso tempo ne costituiscono la necessaria integrazione. Altri invece sono costruiti con finalità descrittiva in modo tale che la figura possa fornire una "persuasione esatta" del testo; e in questo caso quindi il disegno risulta preminente sul testo. Altri ancora, infine, sono costruiti secondo la modalità abachistica e pertanto sono indipendenti dal testo, che risulta pienamente comprensibile anche a prescindere dal disegno.

Rispetto al Codice Vaticano Urbinate Latino 632, il *Libellus in tres partiales tractatus divisus* di Pacioli non presenta variazioni di rilievo. Dal punto di vista matematico i due testi sono equivalenti. Da un confronto serrato delle due opere i curatori dell'edizione nazionale del *Libellus* hanno potuto concludere che "il Pacioli ha rivisto il testo latino, ma in modo tutto sommato superficiale e discontinuo, correggendo gli errori più evidenti, imputabili cioè a trascorsi del copista o a disattenzioni di Piero. In un numero limitatissimo di casi ha aggiunto qualcosa di suo ad integrazione del testo latino, ha rifatto qualche calcolo e quindi corretto qualche errore di Piero, ma ne ha commessi anche di nuovi. Nella grande maggioranza dei casi (80%) specie quando i calcoli erano più laboriosi, ha mantenuto gli errori già esistenti" (Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus.* Corredato dalla versione volgare di Luca Pacioli, Edizione Nazionale degli scritti di Piero della Francesca, a cura di C. Grayson, M. Dalai Emiliani, C. Maccagni, 2 voll., Firenze, Giunti, 1995, *Introduzione*, p. XX-XXXI).

Lo studio della versione volgare di Pacioli – anche se sembra che qui frate Luca si limiti a stampare con alcune aggiunte un manoscritto volgare non vergato dalla sua mano – meriterebbe senza dubbio un'attenzione maggiore da parte degli storici della matematica. In questa sede ci limiteremo ad illustrare alcuni elementi, matematici e grafici, della trattazione pierfrancescana dei poliedri che possono gettare luce su alcuni punti oscuri della *Divina proportione* di Pacioli. L'opera di frate Luca, infatti, suscita più di una questione. Due tra queste, in particolare, saranno qui esaminate. La prima: la costruzione dei poliedri, regolari e semiregolari, realizzata da Pacioli con "vile materia" e da Leonardo nei disegni delle tavole è frutto di una semplice pratica o segue precise misure e proporzioni calcolate algebricamente? La seconda: che rapporto hanno i disegni di Piero con quelli di Leonardo, e con quelli dell'edizione a stampa del 1509?

Riguardo alla prima domanda non può che balzare agli occhi la differenza tra la ricchezza e la precisione delle tavole della *Divina proportione* e la scarna descrizione di queste contenute nel testo. In alcuni casi, come per il corpo di 72 basi e per il rombicubottaedro, il lettore è costretto ad indovinare *ex novo* il procedimento costruttivo impiegato. Gli unici indizi che possono portare sulla via una risposta plausibile alla prima questione sono gli accenni di Pacioli sul modo di trovare le misure degli spigoli dei poliedri, come quando – per il duodecedron absciso elevato – dice:

"E ala sua dimensione se pervene con subtilissima pratica, maxime de algebra & almucabala, a rari nota. E da noi nella nostra opera ben demonstra le vie a poterla aprehendere. E similmente quella delo ycocedron tagliato nel qual exagoni e pentagoni se interpongano che tutte le misure fanno aspre" (L. Pacioli, *Divina proportione,* cit., c. 49v).

Da questo passo e dai rimandi al *Particularis tractatus circa corpora regularia* contenuto nella *Summa,* si ha l'impressione che frate Luca alluda al calcolo delle misure, spesso ricavato per via algebrica, che compare nei problemi sui poliedri proposti da Piero della Francesca, prima nel *Trattato d'abaco* poi nel *Libellus.*

Da un confronto tra i casi sui corpi regolari e dipendenti contenuti nelle due opere di Piero si evince che dei 59 problemi del *Libellus* 35 sono presenti anche nel *Trattato d'abaco.* I problemi espunti dal *Trattato d'abaco* confluiscono quasi tutti nel secondo trattato del *Libellus,* composto da 36 casi, tutti dedicati ai 5 corpi regolari. In particolare, i primi 13 problemi del secondo trattato sono dedicati al tetraedro; i casi 14-19 al cubo; i casi 20-25 all'ottaedro; i problemi 26-29 al dodecaedro e infine i casi 29-36 all'icosaedro. All'inizio di ogni gruppo di problemi, dedicati ad un singolo corpo regolare, il testo di Piero, e quindi la versione volgare di Pacioli, specifica le proporzioni tra lato del poliedro, asse del solido, e diametro della sfera che lo contiene. I problemi che seguono sono applicazioni più o meno sofisticate, a seconda dell'uso o meno di equazioni algebriche, di queste proporzioni desunte dal testo euclideo.

Nell'ambito del procedimento che conduce alla soluzione dei 36 problemi del secondo trattato del *Libellus,* Piero disegna tutti e 5 i corpi platonici, determinando le corrispettive misure di lati, superfici e diametro della sfera circoscritta. È a queste misure, già ricavabili nel *Trattato d'abaco,* che probabilmente ricorre Pacioli per costruire i suoi modelli in legno. Un discorso analogo vale per i corpi "dependenti". In questo caso, però, il *Trattato d'abaco,* del quale Pacioli aveva pubblicato la sezione relativa ai solidi regolari, presentava soltanto due solidi semiregolari: il tetraedro tronco e il cubottaedro. Per la determinazione delle misure degli altri poliedri "scapezzi", nonché del corpo di 72 basi, era necessario il ricorso al trattato IV del *Libellus,* i cui primi sei casi contengono misure e dati relativi al corpo di 72 basi e ad altri 5 poliedri archimedei: l'icosaedro tronco (20 esagoni+12 pentagoni, *casus 2*); il dodecaedro tronco (20 triangoli equilateri+12 decagoni, *casus 3*); l'ottaedro tronco (6 quadrati + 8 esagoni, *casus 4*); il cubo tronco (6 ottagoni+8 triangoli equilateri, *casus 5*); il tetraedro tronco (4 esagoni+4 triangoli equilateri, *casus 6*). È presumibile che quando Pacioli si riferisce al "ycocedron tagliato, nel qual exagoni e pentagoni se interpongano che tutte le misure fanno aspre", alluda ai calcoli svolti da Piero nel *casus 2* del quarto trattato del *Libellus* per determinare le misure necessarie e costruire questo solido. L'abilità di calcolo mostrata di Piero anche nei casi più articolati è del resto evidente. La stessa trattazione delle inclusioni reciproche tra poliedri, che compare nei primi 13 casi del terzo trattato del *Libellus* (e non nel *Trattato d'abaco*), dimostra una certa disinvoltura da parte dell'autore - e c'è da crederlo anche da parte di frate Luca - nel calcolare le misure rispettive dei solidi coinvolti nel problema. Lo stile abachistico della trattazione del resto obbligava a svolgere complicate operazioni di calcolo per venire a capo dei quesiti numerici posti. Il fatto che in ballo ci siano misure dei lati dei poliedri, anziché la ripartizione degli utili di una compagnia mercantile, è secondario per il livello dell'algebra usata.

Per quanto riguarda quindi il primo interrogativo che abbiamo posto sopra, possiamo ragionevolmente ritenere, sulla base di questi indizi, che sullo sfondo dell'arte dei poliedri ci sia una scienza matematica, "l'algebra & almucabala, a rari nota" di cui parla frate Luca, che consente di calcolare le misure con le quali disegnare e costruire i solidi.

Circa la seconda domanda invece non possiamo che indicare alcune parziali risposte, in attesa di uno studio filologico e rigoroso dei disegni delle tavole dei due codici manoscritti della *Divina proportione* (il codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano 170 sup., e quello della Bibliothèque Publique et Universitaire di Ginevra, codice Langues Etrangères 210), delle xilografie contenute nell'edizione a stampa del 1509 e dei disegni di Piero, presenti nel *Trattato d'abaco* e nel *Libellus.* Una prima impressione da un raffronto tra le tavole di Leonardo e i disegni di Piero mostra una marcata differenza sia nel procedimento grafico usato sia nello scopo della figura. I solidi di Piero sono generalmente disegnati in assonometria, e appaiono come corpi geometrici più che come "forme materiali". Le tavole di Leonardo, pur mostrando diversi metodi di rappresentazione, generalmente danno l'idea di essere in prospettiva e, a causa del gioco chiaroscurale dei colori - o del tratteggio nel caso dell'edizione a stampa -, offrono all'osservatore la netta impressione di raffigurare pesanti corpi materiali, appesi ad una corda, e dotati di ombra propria e portata. Cambia inoltre il punto di vista dal quale vengono disegnati i vari poliedri e pertanto si deve concludere che i due pittori, Piero e Leonardo, abbiano rielaborato in maniere grafiche differenti le stesse informazioni matematiche. Piero tuttavia riesce da solo a fare il lavoro di frate Luca e Leonardo messi insieme. Il pittore di Sansepolcro, infatti, sa risolvere tutti i problemi connessi ai poliedri: dallo studio degli ultimi libri degli *Elementi* e dal calcolo, per mezzo dell'algebra, delle misure degli spigoli, fino al disegno del corpo regolare o "dependente". Leonardo e Pacioli devono lavorare per forza di cose in *équipe:* il vinciano prima dell'arrivo di frate Luca a Milano probabilmente non sa nemmeno che cosa siano i poliedri regolari e non ha le competenze matematiche per arrivare a risolvere tutti i problemi da solo. Il secondo ha bisogno di un buona mano artistica "acomodatissima a tutte le discipline mathematice" che sia in grado di disegnare ciò che il frate è riuscito a costruire materialmente, con i modelli in legno.

Non a caso nell'edizione a stampa del *Libellus* Pacioli, in un brano da lui aggiunto al testo di Piero, si rammarica con il lettore di non poter rappresentare tutti i poliedri trattati nel testo per la mancanza di "un bono perspectivo", in grado di disegnarli.

> "Lectore non te maraviliare se de simili corpi composti de diverse e varie base non te se mette sempre in margine loro figure conciosia che le sieno difficilime farle in desegno, però che bisogna che sieno facte per mano de bono perspectivo quali non si possano sempre havere a sua posta, sì comme per sua humanità feci el nostro Lionardo da Vinci, siando a Milano, ali medesimi stipendii delo excellentissimo signor Duca di quello Ludovico Maria Sforza etc. Ma quando in questo de sopra e ancora sequente se sieno posti dinanze in principio in perspectiva de sua mano recorri però che da quelli, comme a suo luogo denanze fo dicto al capitulo LV, lor forme procedano in infinito e se ben guardi fra quelli non fo formato el corpo de decagoni pur in questo l'abiam messo al terzo tractato per terzo caso e tu degli altri potrai el simile fare, etc".

A ben guardare, in realtà, oltre al corpo formato "de decagoni", cioè il dodecaedro tronco, non si trovano tra le tavole di Leonardo nemmeno l'ottaedro tronco ed il cubo tronco. Per due di questi tre poliedri archimedei (il dodecaedro tronco nel *casus 3,* e il cubo tronco nel *casus 5*) il *Libellus* presenta disegni finalizzati più ad esemplificare il procedimento costruttivo descritto nel testo che a mostrare la tridimensionalità dei corpi. Per l'ottaedro tronco (*casus 4*), infine, non c'è nell'edizione a stampa, a differenza del codice Vaticano Urbinate Latino 632, alcuna figura.

Il disegno delle due figure relative al *casus 3* (il dodecaedro tronco), mostra come ricavare il lato del decagono a partire dalla base pentagonale del dodecaedro originario, ma non fa apparire le tre dimensioni del solido, limitandosi alla pianta di una delle 12 basi del dodecaedro. Si vuole prendere sulla "parte media" del lato *bc* del pentagono (figura a sinistra), un segmento *kl* pari al lato del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio. Il raggio del cerchio è pari al lato dell'esagono in esso inscritto, e "per la 9ª del 13° de Euclide, a devidere il lato delo exagono secondo la proportione avente mezzo e doi extremi, la magiore parte è lato del decagono in uno medesimo circulo descritti". Procedendo con i calcoli, sulla base dei dati del problema, si ottiene la misura del lato *kl* dei 12 decagoni e quindi dei 20 triangoli che compongono il dodecaedro tronco.

Pacioli confida nella capacità del lettore ("tu degli altri potrai el simile fare") di visualizzare tridimensionalmente i poliedri descritti, ma è certo che la descrizione della costruzione non è affatto sufficiente a questa operazione. Ciononostante la lettura del testo di Piero è senza dubbio illuminante anche per comprendere la genesi del corpo semiregolare più enigmatico contenuto nella *Divina proportione,* e cioè il rombicubottaedro.

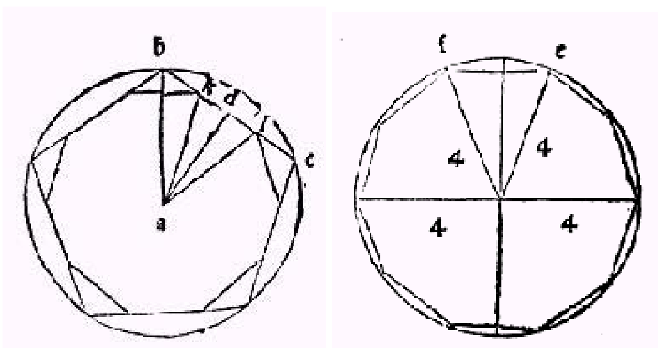


Fig. 33 - Disegni relativi al *casus 3* del *Libellus*,
sulla costruzione delle facce decagonali del dodecaedro tronco

Nell'opera di Piero erano, infatti, contenuti i calcoli di misure e proporzioni, necessarie per la costruzione dei solidi, regolari e semiregolari. Quando frate Luca accenna alla pratica di "algebra & almucabala, a rari nota" non si riferisce certo all'algebra insegnata nelle scuole d'abaco e sicuramente conosciuta da molti, ma allude ad un'abilità di calcolo conosciuta soltanto da pochi matematici. È forse ai lunghi e a volte complicati calcoli di Piero che si sta riferendo.

Il testo della *Divina proportione* rispetto al *Libellus* è un'opera di divulgazione scientifica, ad uso degli artisti. La "secretissima scientia" della quale parla il titolo dell'edizione a stampa è contenuta nella seconda parte del volume, cioè nel *Libellus,* e non certo nella prima. È tuttavia tramite l'opera del frate e non mediante quella del pittore, pure tradotta in volgare e pubblicata dallo stesso Pacioli, che il genere dei "poliedri" si diffonderà nel Cinquecento nell'ambiente degli artisti.

Conclude l'edizione a stampa del 1509 la costruzione delle lettere maiuscole dell'alfabeto mediante l'uso di riga e compasso. Le tavole sulle lettere "antique" inserite nel volume della *Divina proportione* da una parte rimandano direttamente all'umanesimo epigrafico di Felice Feliciano e della cerchia di Andrea Mantegna, dall'altro costituirono un punto di riferimento imprescindibile per la diffusione della scrittura maiuscola antica sia in ambito artistico, sia nella calligrafia e nella tecnica tipografica del primo Cinquecento.

Nella riforma della scrittura inaugurata dall'umanesimo il disegno delle lettere capitali latine di forma epigrafica, cioè di quelle che frate Luca chiama *litterae antiquae,* gioca un ruolo assolutamente centrale, non soltanto nel campo dell'epigrafia rinascimentale ma anche in ambito tipografico. Già con Poggio Bracciolini e Niccolò Niccoli, iniziatori della riforma grafica umanistica sia per le lettere minuscole sia per le capitali, la tendenza ad utilizzare le capitali latine in luogo delle maiuscole tradizionali era piuttosto evidente. Ciò nondimeno la scrittura umanistica di Poggio non seguiva regole geometriche ma era libera e spontanea, basata essenzialmente sul calco dei codici antichi.

La fonte principale del rinnovamento grafico rinascimentale tuttavia non proveniva dai codici manoscritti ma dall'epigrafia e dalla numismatica. Le lettere maiuscole usate nelle iscrizioni lapidarie e nelle monete antiche, infatti, costituivano la testimonianza diretta della scrittura maiuscola latina, facilmente rintracciabile nei ruderi e nei reperti dell'antica civiltà di Roma. Nella prima metà del secolo le lettere antiche furono utilizzate soprattutto da artisti fiorentini come Lorenzo Ghiberti, Luca della Robbia e Donatello, in connessione con la scultura e l'architettura del primo Rinascimento. Le lettere lapidarie fiorentine, tuttavia, non riproducevano fedelmente l'alfabeto classico, ma si limitavano ad un'imitazione ad occhio che prescindeva dalla ricerca dei canoni proporzionali necessari alla loro costruzione. Soltanto a partire dagli interessi antiquari dell'umanesimo padovano l'epigrafia latina conobbe una rinascita prorompente, caratterizzata dallo studio scientifico delle antiche inscrizioni e dalla ricerca di canoni proporzionali con i quali disegnare le lettere antiche.

L'umanesimo epigrafico e antichista di Felice Feliciano, Giovanni Marcanova e degli studiosi della cerchia di Andrea Mantegna non solo aveva riportato alla luce i caratteri usati nelle antiche iscrizioni romane, ma si era dedicato allo studio delle proporzioni in esse implicate. Il primo trattato sulla costruzione delle lettere capitali "con ragione di geometria" – e cioè l'*Alphabetum Romanum* (ca. 1460) contenuto nel cod. Vat. Lat. 6852 – è opera, infatti, di Felice Feliciano, infaticabile raccoglitore di inscrizioni antiche e "amicus incomparabilis" di Mantegna. Dallo studio delle epigrafi classiche Feliciano probabilmente ricavò sia il metodo geometrico generativo per mezzo del cerchio inscritto in un quadrato ("suole l'usanza antiqua cavare la littera di tondo e quadro"), sia il rapporto proporzionale 1:10 tra lo spessore massimo della lettera e la sua altezza.

Lo studio delle lettere maiuscole dell'alfabeto latino non costituì tuttavia una prerogativa degli epigrafisti rinascimentali; tant'è vero che il primo libro a stampa sull'argomento fu opera di un calligrafo, miniatore e tipografo di mestiere: Damiano da Moile. L'opuscolo ha uno scopo esplicitamente pratico e si rivolge ai lapicidi e agli amanuensi per insegnare loro la costruzione geometrica delle lettere maiuscole antiche. La descrizione del procedimento costruttivo è più semplice di quella del Feliciano e prevede un canone proporzionale di 1:12 nel rapporto tra spessore massimo e altezza delle lettere.

La diffusione di questo genere di trattati è senza dubbio una innovazione del Rinascimento, che testimonia in modo esemplare l'esigenza degli uomini del XV secolo di risuscitare il mondo antico anche nelle forme della scrittura.

Fu, tuttavia, soltanto con la stampa della *Divina proportione* che si svelò e si diffuse nel mondo dei tecnici il "segreto" geometrico della costruzione dell'alfabeto "dignissimo", mediante l'uso di riga e compasso. L'opera del Feliciano rimase manoscritta e quella di Damiano da Moile ebbe una diffusione tanto limitata che a noi è giunto soltanto un esemplare del libro, ricuperato peraltro nel 1926.

Pacioli introduce l'uso dell'alfabeto maiuscolo nel capitolo VI del *Trattato di architettura,* dedicato allo "stilobata over pilastro". Rivolgendosi agli scalpellini di Sansepolcro frate Luca ricorda:

> "Costumase per molti in ditto pilastro ponere lettere per diversi ordinate, che dicano e narrano loro intento, belle, antiche, con tutta proportione, e così in altri frontespicii e fregi e monumenti, loro epitafii quali senza dubio molto rendano venusto lo arteficio. E però a questo fine ho posto ancora in questo nostro volume, detto la *Divina proportione,* el modo e forma con tutte sue proportioni, uno degno alfabeto antico, mediante el quale potrete scrivere in vostri lavori quello ve acaderà, e sirano senza dubio da tutti commendati".

Qui frate Luca si riferisce all'uso epigrafico delle lettere maiuscole dell'alfabeto, ma ci tiene subito a ribadire che la sua trattazione dei caratteri capitali serve "aciò li scrittori e miniatori, che tanto se rendano scarsi a demostrarle, li fosse chiaro che lor penna e pennello, senza le doi linee matematici, curva e retta", non sono sufficienti per condurre a "perfettione" la loro opera. In altri termini, frate Luca intende sottolineare che la perfezione estetica nelle lettere dell'alfabeto si raggiunge con squadra e compasso e non semplicemente con la pratica. L'arte raggiunge il suo obiettivo soltanto quando fabbrica le sue opere sulle fondamenta della scienza matematica.

La costruzione delle lettere dell'alfabeto mediante "circino e libella" è finalizzato alle "opere in scultura, ne le quali molto se costuma porne, o per epitafi o altri ditti". Si tratta quindi di riportare in uso, tramite il supporto della geometria, la tradizione epigrafica che "ne li archi triunfali e altri excelsi edificii in Roma e altronde apare". Pacioli indica la proporzione di 1:9 tra lo spessore massimo della lettera e la sua altezza, discostandosi così dai due trattati precedenti a noi noti. Rispetto all'opera del Feliciano e di Damiano da Moile compare inoltre una più attenta descrizione del procedimento costruttivo ed un'accentuazione del ruolo delle proporzioni della struttura delle lettere capitali. L'idea che le proporzioni siano alla base della bellezza classica rientra del resto nell'ambito della riflessione pacioliana sul ruolo centrale della geometria nelle arti e nelle scienze.

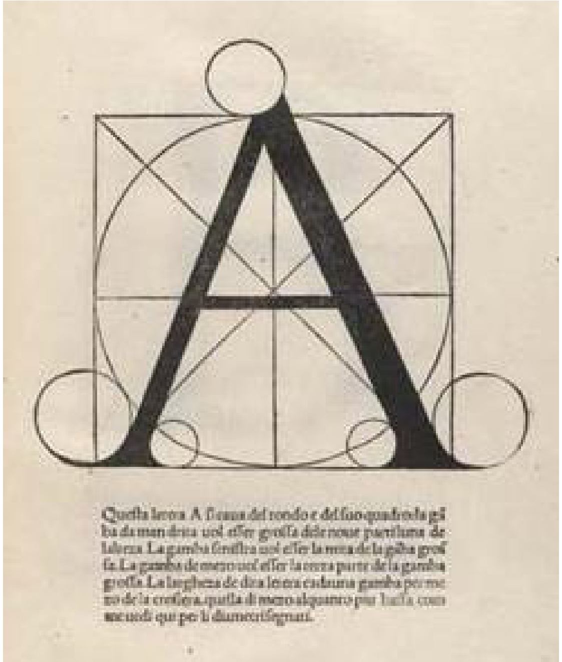


Fig. 34 – Lettera "A", dall'*Alphabeto Dignissimo Antiquo* di Luca Pacioli

L'illustrazione del metodo per costruire lettere maiuscole con riga e compasso si rivolge non soltanto ai "lapicidi" ma anche agli "scrittori" e "miniatori" in generale. L'idea di trasportare nell'arte della stampa i criteri adottati per le epigrafi non dovette essere estranea all'editore Paganino Paganini e soprattutto a suo figlio Alessandro, al quale Pacioli si rivolge, proprio nel frontespizio della *Divina proportione*, per lodarne i caratteri di stampa: "A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat". Per quei caratteri, così innovativi, per la consulenza grafica e i disegni delle xilografie contenute nel volume del 1509, la collaborazione di frate Luca con il suo editore dovette essere assidua. Lo stesso matematico di Sansepolcro rivela agli scalpellini suoi conterranei che "el tempo per ora non m'è concesso, peroché de continuo dì e notte me conviene in su li torcoli e lor calcografi a governar l'opere nostre con tutta diligentia, commo se rechiede". L'assistenza tipografica da parte di Luca dal Borgo non si limitò alla correzione delle bozze ma molto probabilmente riguardò anche altre fasi della edizione a stampa, a cominciare dal controllo delle xilografie. Alessandro Paganini fu uno degli editori più sensibili al gusto classico nell'arte della stampa e il contatto con Pacioli, teorico della costruzione geometrica delle lettere maiuscole antiche, rappresentò un punto di svolta anche in quest'arte.

Dopo l'edizione della *Divina proportione*, si registra una vera propria esplosione di trattati sull'alfabeto maiuscolo antico. Nel giro di cinquanta anni, gli autori che si richiamano all'opera di Pacioli, soltanto in Italia sono almeno 7: Sigismondo Fanti (*Theorica et Pratica…de modo scribendi,* Venezia,1514); Francesco Torniello (*Opera del modo de fare le littere maiuscole antique,* Milano, 1517), Ludovico degli Arrighi (*La operina da imparare di scrivere,* Roma, 1522), Giovanni Antonio Tagliente (*La vera arte delo excellente scrivere,* Venezia, 1524), Giovanbattista Verini (*Luminario,* Toscolano, 1526), Fra' Vespasiano Amfiareo(*Nuovi modi d'insegnare a scrivere,* Venezia, 1548) e Ferdinando Rouano (*Sette alphabeti di varie lettere,* Roma, 1554). All'estero, Albrecht Dürer, nel terzo libro dell'*Underweysung der Messung*, e Geoffroy Tory, nel suo *Champ fleury* (Parigi, 1529), contribuirono a divulgare lo stile delle lettere maiuscole antiche e i tipografi più sensibili al gusto umanistico e rinascimentale adottarono questi caratteri nelle loro edizioni.

8 - Il trattato «De viribus quantitatis» e i giochi matematici

Delle opere di Pacioli pervenute fino a noi resta da illustrare, oltre al trattato sugli scacchi e all'edizione latina degli *Elementi* di Euclide (1509), il Codice 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna, intitolato *De viribus quantitatis*. Il manoscritto, proveniente dalla biblioteca di Giovanni Giacomo Amadei (1686-1768), consta di 306 carte scritte in volgare italiano, precedute da un indice dettagliato degli argomenti e dalla lettera dedicatoria. Sebbene non contenga il nome del destinatario, l'epistola di dedica permette di accertare il periodo di composizione del *De viribus* (tra il 1496 e il 1509), l'esistenza della traduzione in volgare degli *Elementi* di Euclide e, infine, quella di un *Tractato de ludis*, detto *Schifanoia*, dedicato a Francesco Gonzaga e Isabella d'Este.

> "Ma ormai aproximandosi de mia vita l'ultimi giorni - scrive Pacioli - , aciò le durate fatighe et assidue vigilie non dovesino al tutto annichilarsi, como è ditto, a li non mediocri affanni, posta già la extrema mano con la egregia per noi similmente, traductione de latino in vulgare de verbo ad verbum del maximo Monarcha de le Mathematici discipline megarense Euclide, insiemi col iocondo et alegro tractato de ludis in genere, cum illlicitorum reprobatione, spetialmente di quello de schachi, in tuti modi

detto Schifanoia et alle excellentie del segnior Marquese et marchigiana di Mantova Francesco Gonzaga e Isabella extense a questi dedicato; deliberai al presente compendio in segno de efficacissimo servile amore a V. Ex. dicare...”

Il *De viribus quantitatis*, nel quale a più riprese compare la figura di Leonardo da Vinci, costituisce un’ampia raccolta di enigmi e giochi matematici, che secondo Pacioli servono a “demonstrare li admirandi e stupendi effecti che de ditta quantità procedano, sì della discreta como della continua”. Il filo conduttore del trattato è il suo stesso titolo: *de viribus quantitatis*, tradotto dallo stesso Pacioli con l’espressione “de le forze della quantità”, come a voler ricordare al lettore che gli effetti meravigliosi e stupefacenti degli enigmi proposti e risolti in quest’operetta provengono dalle dimostrazioni teoriche delle proprietà geometriche ed aritmetiche già esposte nella *Summa*. Il compendio è diviso in tre sezioni: 1) la prima, che consta di 80 “effecti” (cc. 3v-132v.), è dedicata alla quantità discreta, e si interessa “de le forze numerali cioè de Arithmetica”; 2) la seconda, che comprende 134 “documenti” (cc.133r-230v.), tratta della quantità continua e “de la virtù et forza lineale et Geometria” ed è seguita da precetti “morali utilissimi” (cc. 231r-v), composizioni poetiche (cc. 232r-233r) e “proverbi merchanteschi” (cc. 233r-235v); 3) la terza inizia con la trattazione “della forza et virtù naturale nel scrivere” e contiene una raccolta di ricette chimiche per realizzare l’inchiostro invisibile, per fabricare la carta carbone, per produrre “colla de vetro fortissima”, per “far specchio da vetro brunito”, per “far polvere de bombarda”; prosegue con una serie di giochi di prestigio e di esperimenti stupefacenti, alcuni dei quali fanno uso di calamite o del principio della spinta di Archimede; e si conclude con 222 indovinelli “vulgari a solicitar ingegno et a solazzo” (cc. 268v-292v). .

Nell’insieme il manoscritto 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna si configura come uno zibaldone di letteratura ricreativa che raccoglie, oltre a dilettevoli problemi aritmetici e geometrici, anche proverbi mercanteschi, norme morali, indovinelli, rebus, quadrati magici, ricette chimiche ed esperimenti fisici che suscitano la meraviglia di coloro che prendono parte a questi giochi di società.

La seconda parte del *De viribus quantitatis* contiene 80 problemi geometrici e 54 rompicapo di tipo fisico-meccanico. Molti di questi concernono costruzioni geometriche euclidee e tolemaiche; altre invece propongono formule per la costruzione approssimata dei poligoni regolari di 9, 11, 13, 17 lati. Quella che permette di trovare il lato dell'enneagono è la seguente: $l_9=(l_3+l_4)/4$. Per il poligono di 11 angoli, il lato è dato dalla sezione aurea di $(l_3+l_6)/3$, mentre il lato del poligono di 13 angoli è la parte minore della sezione aurea di 5r/2 della circonferenza in cui è inscritto. I "documenti" 23-28 del *De viribus* di Pacioli hanno peraltro una corrispondenza contenutistica e stilistica con il secondo libro della *Unterweysung der Messung* (1525) di Dürer, dove il pittore tedesco fornisce regole per la costruzione approssimata dei poligoni regolari ad uso dei tecnici e in particolare degli artisti, e costituiscono un chiaro esempio del tipo di geometria pratica conosciuta dallo strato culturale intermedio tra i dotti e gli analfabeti.

L'opera *De viribus quantitatis*, pertanto, si configura come una specie di summa di aritmetica e geometria ricreativa, che alla tradizione abachistica, iniziata con la parte ottava del *Liber abaci* di Leonardo Pisano, aggiunge però una ricca varietà di giochi matematici, di enigmistica, rebus, esperimenti fisici e ricette chimiche di origine non esclusivamente abachistica. Tale aspetto composito si giustifica anche con i destinatari dell'opera, che non sono soltanto gli studenti delle scuole d'abaco o i "pratici arithmetici", ma anche i duchi, i marchesi e i principi degli Stati Italiani del Rinascimento e i loro cortigiani; cioè, in altri termini, l'ambiente socioculturale al quale è dedicato anche il trattato *De ludo scachorum*.

Scritto per allietare le serate a corte e per acuire l'ingegno alla soluzione di problemi di enigmistica e di rompicapo aritmetici e geometrici, il *De viribus quantitatis*, rappresenta uno dei primi esempi di un'opera completamente dedicata ai giochi matematici e di intelligenza. Precedenti del trattato pacioliano si trovano nelle *Propositiones ad acuendos iuvenes*, attribuite ad Alcuino di York , e nel XII libro del *Liber abaci* del Fibonacci. La tradizione abachistica, del resto, forniva a Pacioli gran parte degli indovinelli e dei "bolzoni" che i maestri d'abaco adoperavano per stimolare l'intelligenza dei loro studenti e presentare regole di soluzione applicabili anche a casi commerciali. Il frate di Sansepolcro conosceva molti di questi problemi aritmetici e geometrici, che peraltro sono presenti già nel *Tractatus ad discipulos perusinos* del 1478. Che la tradizione abachistica sia la fonte principale da cui traggono origine questi enigmi è ravvisabile anche dal fatto che un'opera di matematica pratica in volgare come il *Triparty* di Nicolas Chuquet sia corredata da giochi matematici molto simili a quelli proposti da Pacioli. Le successive opere a stampa di algebristi italiani presentano anch'esse una sezione dedicata agli enigmi matematici. Tra le altre ci limitiamo a ricordare la *Practica d'arithmetica* di Francesco Galigai (Firenze, 1548), la *Practica aritmeticae generalis* (1539) di Girolamo Cardano, e *La prima parte del General trattato* (Venezia, 1556) di Nicolò Tartaglia. Molti dei giochi matematici contenuti in queste opere sono direttamente tratti dal *De viribus* pacioliano, e questo dimostra la discreta diffusione di un filone matematico niente affatto trascurato anche dai primi algebristi moderni.

9 - «De ludo scachorum»: Pacioli scacchista e matematico

L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'immilla

(Dante, *Paradiso*, XXVIII, 91-93)

Nella terzina che il Poeta utilizza per indicare l'innumerevole schiera di creature celesti che come scintille si sprigionano dal fuoco dell'Amore Eterno di Dio si cela lo stretto rapporto fra matematica e scacchi che fin dall'origine lega la scienza dei numeri e i problemi logici relativi al gioco di orgine indiana. Dante, infatti, descrive la miriade di intelligenze celesti che popolano i cieli del Paradiso riferendosi alla leggenda di origine orientale, evidentemente ben nota agli inizi del Trecento, secondo cui l'inventore indiano degli scacchi, al re di Persia che voleva compensarlo, avrebbe chiesto un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza, e così via, sempre raddoppiando fino alla sessantaquattresima. Il re dopo aver accettato a cuor leggero l'impegno, dovette assai presto accorgersi che tutto il grano del suo regno non sarebbe bastato a mantenere la promessa. L'inventore indiano degli scacchi, cioè del gioco della caturanga, aveva infatti pensato di sfruttare le 64 case della scacchiera (l'ashtapada) come termini della progressione geometrica 2^n. La somma dei chicchi di grano ottenuti da tale progressione è un numero impressionante pari a 2^n-1 (per n=64 il numero di chicci di grano è 18.446.744.073.709.551.615), tante quante a Dante parvero le scintille delle creature celesti che si sprigionavano dal fuoco dell'amore divino.

La leggenda rievocata dal Poeta, lungi dal costituire una geniale trovata letteraria, si fonda su un nesso storico e concettuale fra gli scacchi e i numeri. È suffragata da indizi rilevanti, infatti, l'ipotesi storiografica che l'origine degli scacchi, al pari di quella delle cifre arabe, sia indiana. Sebbene non esistano trattati di scacchi risalenti all'antica India, alcuni termini contenuti nei testi persiani sopravvissuti non hanno alcun riferimento etimologico nel pahalavi o nell'arabo, ma diventano intelligibili se si considerano derivati dal sanscrito. La parola *catrang* che indica il gioco degli scacchi in uno dei più antichi testi persiani, *Wizarisn* i *catrang*, del resto, non è altro che la traduzione del termine sancrito *caturanga*. Come le cifre indicanti i numeri e le regole aritmetiche connesse al sistema di numerazione posizionale, anche le regole del gioco degli scacchi, il nome dei pezzi (Shäh=Re; Firz= Consigliere, Donna; al-Fil=Elefante, Alfiere; Faras=Cavallo; Ruhk= Rocca, Torre; baidaq=pedone), la loro disposizione sulla tavola da gioco divisa in 64 caselle furono assimilate dagli arabi al momento dell'invasione della Persia.

E tramite gli arabi entrambe le due invenzioni indiane, le cifre e gli scacchi, passarono in Europa: le prime dopo la diffusione del *Liber abaci* (1202) di Leonardo Pisano, il Fibonacci; i secondi qualche secolo prima, tanto da comparire fra le sette *probitates* del cavaliere descritte da Pietro Alfonsi (m.1140) nel capitolo 44 della *Disciplina Clericalis* e da meritare una menzione della "canzoni di gesta" del ciclo bretone di re Artù e del ciclo carolingio dei paladini del re di Francia.

Come i trattati d'abaco riguardanti problemi aritmetici e algebrici connessi al sistema posizionale indoarabico veicolato in Occidente dall'opera di Fibonacci, anche i libri di scacchi contenenti problemi di gioco, i cosiddetti "partiti", cominciarono a diffondersi in Europa nel XIII secolo. Il nome "partiti" alludeva probabilmente alla battaglia, alla tenzone fra i due giocatori e consisteva nel proporre all'avversario una scommessa, abitualmente con posta in denaro, avente per scopo la possibilità o l'impossibilità di una soluzione problematica nella quale uno dei due colori, muovendo per primo, si impegnava a dare scacco matto in un numero determinato di mosse. La combinazione decisiva per vincere il "partito" richiedeva abilità logico-matematiche rilevanti e spesso presentava un'eleganza e una bellezza che forniva a tali problemi scacchistici l'ebbrezza della creazione artistica di un ingegno razionale.

Di tale tenore sono i "partiti" presenti nel *Libros del Juegos* compilato per ordine del re Alfonso X di Castiglia alla fine del XIII secolo. Il codice, oltre a rappresentare un crocevia importante per la trasmissione del gioco arabo ai paesi europei, costituisce una matrice anche dei trattati di scacchi relativi ai "partiti". Di questa produzione manoscritta, oltre al cosiddetto "gruppo anglo-normanno", due sono le raccolte problemistiche più importanti, riconducibili allla famiglia del *Bonus Socius* e a quella analoga del *Civis Bononiae*. Come per i trattati d'abaco derivanti dall'opera del Fibonacci, anche per questa produzione di problemi scacchistici si possono rintracciare molte permanenze e poche novità della soluzione di casi standard.

Alla luce della comune radice genetica e delle vicende storiche che trasportarono le cifre indoarabiche e gli scacchi in Occidente non stupisce affatto che nella figura di Luca Pacioli, alla fine del Quattrocento, queste due tradizioni potessero trovare una confluenza, testimoniata da un trattato citato dallo stesso frate di Sansepolcro. Del manoscritto - quarantotto carte, ottimamente conservate, con fini illustrazioni dei pezzi, 114 situazioni pratiche del gioco e relative soluzioni - s'era persa nel tempo ogni traccia, ma non la traccia documentaria, attestata sia dal *De viribus quantitatis*, in cui si parla del trattato "de schachi, in tuti modi detto Schifanoia et alle excellentie del segnior Marquese et marchigiana di Mantova Francesco Gonzaga e Isabella extense a questi dedicato", sia nella Supplica al Senato Veneziano per la stampa delle sue opere quando si parla del «de ludo scachorum cum illicitorum reprobatione dicto schiphaniora anchor vulgar».

Il trattatello sugli scacchi aveva visto la luce alla corte di Mantova dove, nella seconda metà del 1499, Pacioli si era forse trasferito con l'amico e allievo di matematica Leonardo da Vinci, profughi entrambi dal ducato milanese di Ludovico il Moro, sotto attacco di Luigi XII. Dopo numerosi transiti da città a città, da una mano bibliofila all'altra, l'ultimo approdo del prezioso manoscritto fu la raccolta della Fondazione Palazzo Coronini Cronberg di Gorizia. Qui Duilio Contin, storico del libro, l'ha infine riconosciuto nel dicembre del 2006, tra pregiati pezzi antiquari acquisiti dal conte Guglielmo Coronini nel 1963. L'attribuzione a Pacioli trova conferma sia nelle caratteristiche grafiche del codice, sottoposto all'esame paleografico di Attilio Bartoli Langeli, sia nella lingua del manoscritto che, a giudizio di Enzo Mattesini, esperto conoscitore del volgare utilizzato in altre opere da Pacioli, non presenterebbe caratteristiche che non possano essere ritenute quelle del matematico di Sansepolcro .

Il trattatello pacioliano è importante non soltanto come testimone della vita culturale delle corti italiane e dei passatempi improntati alla soluzione di rebus, giochi enigmistici e logica scacchistica, ma anche come testo fondamentale per la comprensione della riforma nel gioco degli scacchi che si verifica fra il XV e il XVI secolo. I 114 "partiti", che costituiscono il manoscritto, presentano, infatti, soluzioni di casi scacchistici sia della maniera di giocare antica (del *viejo*) sia della moderna “ala rabiosa”. Le novità fondamentali di questa riforma delle regole di gioco sono connesse alle funzioni della Donna, che acquista la possibilità di dominare tutte le linee che si incrociano nella sua casa, e dell’Alfiere, che estende il suo dominio a tutte le case della diagonale del suo colore, anche se perde la possibilità di saltare una casa in diagonale che gli era concessa nelle vecchie regole di gioco.

Le nuove regole del gioco degli scacchi, che velocizzano le partite e sono in uso ancora oggi, sono attestate nell’ultimo decennio del Quattrocento in molte regioni dell’Europa da diversi codici manoscritti, lo *Scachs d’Amor*, in catalano, il *Göttingen*, in latino, il *Licena MS*, in un volgare misto di antico francese, provenzale e italiamo, e il *Le jeu des Eschés de la Dame moralisé*, in francese. Considerando che i primi volumi a stampa (Vicent, *Libros dels jochs partis del schaches en nombre de 100*, Valencia 1495ca; Lucena, *Repeticòn de amores e arte breve del Ajedrez con CL juegos de partito*, Salamanca, 1497ca) rimontano anche essi alla fine del XV secolo, il trattato pacioliano assume un ruolo importante a conferma del cambiamento rinascimentale in corso del gioco degli scacchi anche in Italia. Il Bel Paese, del resto, come la Spagna era la via d’accesso del mondo arabo all’Europa centrale e Settentrionale e costituì una culla di nascita anche del gioco moderno degli scacchi. Oltre al trattato di Pacioli, altri codici attestano il cambiamento di regole avvenuto fra Quattrocento e Cinquecento: 1) il Casanatese (Codice Lat. Ms. 791) datato ex anno 1511 e firmato da Giovanni Cachi di Terni; 2) il *Liber de partitis schachorum*, di Paolo Guarino del 1512; 3) i *Ludi varii* della Biblioteca Malatestiana di Cesena (Miscellaneo 166.34); 4) il *Latrunculorum ludus* conservato alla Biblioteca Comunale Augusta di Perugia (Lat.MS775 L.27); 5) il Codice Cartaceo CL. XIX, 51 della Biblioteca Nazionale di Firenze e il testo a stampa di Damiano, *Il libro da imparare a giocare a scachi et de li partiti,* (Roma, 1512).

Pacioli intendeva dedicare il suo trattato *De ludo scachorum* a Isabella d’Este sia per l’accoglienza ricevuta a Mantova dal frate e dall’amico Leonardo in seguito alla caduta di Milano nelle mani dei francesi sia per la passione che Isabella nutriva per gli scacchi fin dagli anni della sua giovinezza. La raffinata marchesa di Mantova, peraltro, non era un personaggio unico ed eccentrico nel coltivare l’interesse per un gioco che Baldassarre Castiglione, nel *Cortegiano*, definisce “gentile intertenimento ed ingegnoso”. Il manoscritto pacioliano di Gorizia, però, non è probabilmente la versione definitva con la quale Pacioli indendeva omaggiare Isabella. Pare evidente, infatti, che il libello che frate Luca portava con sé aveva avuto una gestazione lenta probabilmente durante gli anni passati alla corte sforzesca. Esso appare come una prima bozza di trattato, un'antologia disordinata di "partiti" raccolti nel tempo dal frate, matematico scacchista, che a volte, come al f. 41r, partito 97, rimanda ad appunti già presi in precedenza su altri fogli «Idem habes in meis quinternis carti 103. Errato melius carti 152» circa la soluzione di "partiti" analoghi.

Come per la sua opera matematica anche per quella scacchistica frate Luca poteva ricorrere alla tradizione dei trattati di scacchi della famiglia del *Bonus Socius*, e a quella del *Civis Bononiae*, e realizzare una compilazione sistematica della migliore produzione scacchistica medievale in modo analogo a quanto già fatto nella *Summa* per la matematica abachistica. La compilazione definitiva di un codice da offrire ai Gonzaga avrebbe richiesto una riorganizzazione e una revisione del manoscritto sulla base di criteri razionali più obiettivi e probabilmente un'introduzione sullo scopo e il valore del gioco degli scacchi per la cultura dei cortigiani.

Nella dedica del *De viribus quantitatis*, del resto, si accenna al "iocondo et alegro tractato de ludis in genere, cum illicitorum reprobatione, spetialmente di quello de schachi, in tuti modi detto *Schifanoia* et alle excellentie del segnior Marquese et marchigiana di Mantova Francesco Gonzaga e Isabella extense a questi dedicato". Da questa breve descrizione e dalla Supplica al Senato Veneziano per la stampa delle sue opere, dove si parla del *de ludo scachorum cum illicitorum reprobatione dicto schiphanoia*, si evince che il gioco, lungi dal costituire un pretesto per scommesse in denaro (cum illicitorum reprobatione), doveva essere finalizzato all'intrattenimento ingegnoso dei cortigiani per trascorrere il tempo in modo intellettualmente proficuo (in tuti modi detto Schifanoia, e cioè scaccia noia). Risulta, a questo proposito, storicamente interessante il rapporto fra l'introduzione delle nuove regole alla "rabiosa", o "de la donna", e la diffusione del gioco negli ambienti cortigiani. Le nuove regole, infatti, sembrano motivate non tanto dall'invenzione di nuovi "partiti" da usare per le scommesse in denaro, quanto dalla necessità di velocizzare e rendere dinamico un gioco di corte dalle evidenti valenze allegoriche.

Gli scacchi, del resto, fin dal loro apparire in Europa subirono una trasformazione simbolica rilevante tanto da costituire una vera e propria «imago mundi» della civiltà medioevale prima e di quella rinascimentale poi. Emblematico è a questo proposito il trattato medioevale *De ludo* del frate domenicano Jacopo da Cessole, che prendendo gli scacchi come pretesto da cui trarre immagini e similitudini, si avventura in una serie di ammaestramenti morali e spirituali adeguati alla società del suo tempo.

In questa trasposizione metaforica del gioco indoarabico alla civiltà europea la simbologia bellica implicita nello *Shatranji* arabo lascia il posto all'immagine di una corte medioevale. Quella che nel gioco arabo rappresentava una metafora della guerra con uno Shah (Re) coadiuvato da un Consigliere (Frazen, firzan o ferz in arabo) e difeso da un esercito composto di cavalli (asp) fanti a piedi (Piydah, pedoni), elefanti (Pil, al-Fil in arabo), e carri da guerra (Rukh), diventa nell'immaginario collettivo del Medioevo l'allegoria di una corte. Restano è vero le figure del Re, del Cavallo, che, però, spesso viene designato come Cavaliere e del Pedone, ma l'elefante al-Fil, forse per assonanza fonetica, diventa un Alfiere, un portabandiera; il carro da guerra (Rukh) si trasforma in una rocca e cioè in una Torre di un castello medioevale e al fianco del Re invece di un ministro o un consigliere compare la Regina, la Donna. È probabile che il *firzan* arabo si tramutò in *ferz, fierge* e infine in *vierge*, la Vergine, la Donna e Regina. Su come la Vergine e Regina entrasse nel Medioevo anche nel gioco degli scacchi occorrerebbe intraprendere ricerche più accurate legate alla storia sociale delle donne e all'importanza del culto della Madonna nel definire anche il ruolo delle Dame nelle corti medioevali prima e rinascimentali dopo. È un dato di fatto però che almeno nell'élite aristocratica del Rinascimento la donna aveva un ruolo, sebbene secondario, niente affatto trascurabile, come del resto, dimostra la stessa figura di Isabella d'Este. Lo stesso inizio del poema che meglio si adatta al gusto letterario del primo Cinquecento e cioè *l'Orlando furioso* di Ariosto, tanto apprezzato dalla stessa Isabella, inizia con dei versi ("Le donne, i cavalier l'armi e gli amori") che sembrano alludere ad un mondo cavalleresco vagheggiato ancora nelle corti del Rinascimento e simboleggiato proprio dal gioco degli scacchi.

La riforma della fine del XV secolo fu incentrata soprattutto sulla funzione della Donna, l'unica figura femminile nel gioco degli scacchi, che da quel periodo assunse tanta importanza da condizionare in modo determinante lo svolgimento delle partite. È probabile che questa riforma fosse legata più ad esigenze intrinseche di sviluppo del gioco che a motivazioni connesse alle scommesse in denaro sui vincitori dei "partiti". Si può ipotizzare quindi che nella vita di corte l'interesse per il gioco fine a se stesso spingesse o comunque influenzasse l'introduzione delle nuove regole. La diffusione del gioco nelle corti, del resto, era motivata dal fascino di un “gentile inertenimento” intellettuale che metteva alla prova l’arguzia dei contendenti e non aveva alcuna finalità di lucro illecito. I 26 casi “a la rabiosa” contenuti nel *De ludo scachorum* di Pacioli sono i testimoni eloquenti di questa riforma caldeggiata dalla passione intellettuale per la problemistica, che condusse il frate di Sansepolcro a redigere un trattato finalizzato a scacciar la noia dei cortigiani e a coltivare l’interesse per un gioco matematico che acuiva la logica deduttiva.

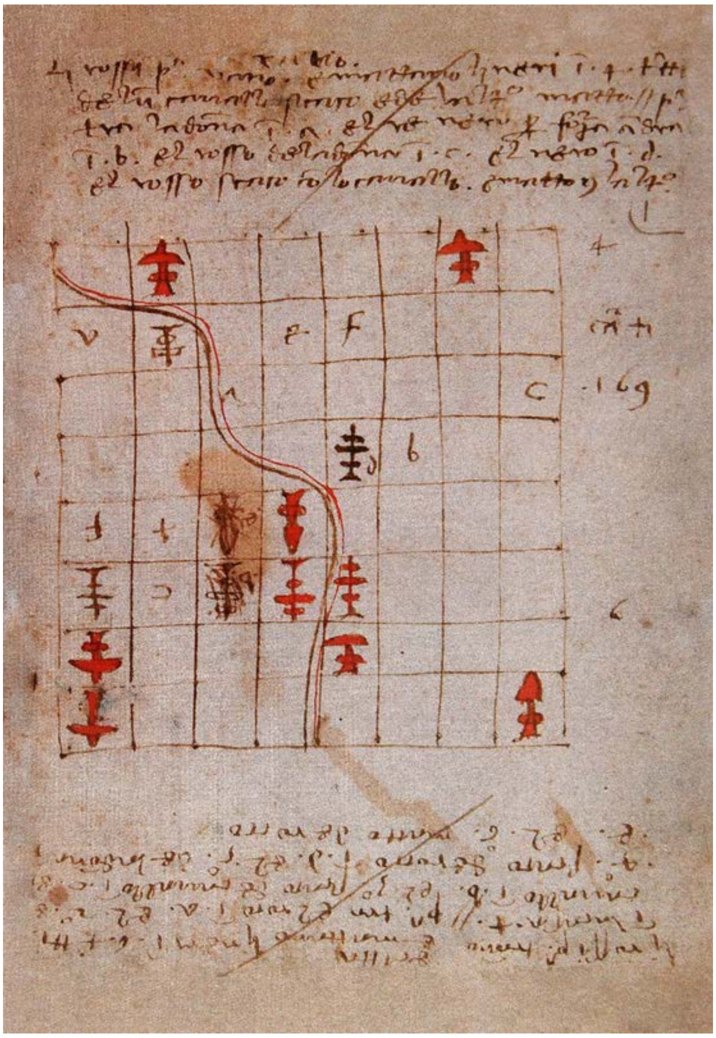


Fig 35 – Luca Pacioli, *De ludo scachorum*, f. 17, dritto - Partito 1, Aboca Edizioni, Sansepolcro, 2007

10. L'edizione latina degli «Elementi» di Euclide del 1509

L'edizione degli *Elementi* curata da Pacioli, e stampata per i tipi di Paganino Paganini nel 1509, si basa sulla versione di Giovanni Campano da Novara (secolo XIII), tratta dalla traduzione dall'arabo al latino di Adelardo di Bath (secolo XII), ed è la terza edizione a stampa dell'opera di Euclide, dopo quella del tipografo Erhard Ratdolt, realizzata a Venezia nel 1482, e quella di Bartolomeo Zamberti (Venezia, 1505). Quest'ultima, a differenza dell'*editio princeps*, che continua la tradizione manoscritta arabo-latina culminata col Campano, contiene la traduzione in latino di un codice greco risalente alla versione di Teone di Smirne. Si può dire pertanto che l'edizione dell'Euclide di Zamberti sia uno dei primi risultati dell'impatto dell'umanesimo sullo studio dei testi matematici antichi.

L'attenzione umanistica al ricupero dell'originale greco, che contraddistingue l'edizione di Zamberti è riconducibile in ultima analisi all'atteggiamento critico di Giorgio Valla nei confronti della cultura medievale, considerata come una deplorevole cesura tra la grande civiltà antica e quella del Rinascimento. Le incrostazioni linguistiche sedimentatesi nei classici tramandati dalla tradizione arabo-latina dovevano essere eliminate, nelle intenzioni dell'umanista piacentino, mediante il ritorno alla lettura diretta dei codici greci. Nel caso degli *Elementi* lo stesso Valla utilizzò un manoscritto greco (Estense α,υ',9,7) dal quale tradusse i brani poi inseriti nei libri XI e XII del *De expetendis et fugiendis rebus* (Venezia, 1501).

Il giudizio su Campano da Novara, contenuto in questa monumentale opera enciclopedica di stampo umanistico, è molto critico:

> "Constat multos Euclidis locos tum praeteriisse, tum non commode interpretatum et sua non satis examinate subdidisse, in multis fateamur acute interpretatum, sed errorum non bene dictorum nobis esse cura debet".

In realtà l'emendazione degli errori di Campano non è sistematica nell'opera di Valla e soprattutto non riguarda tanto il contenuto dei commenti matematici, quanto il lessico adoperato dalla tradizione arabo-latina. Nella terminologia matematica di Giovanni Campano il rombo viene, ad esempio, indicato con il termine di matrice araba *helmuyan*, il trapezio *helmuaripha*. Giorgio Valla invece adopera i termini traslitterati dal greco *rhombus* e *trapezium*. Campano, inoltre, talvolta ricorre a perifrasi per indicare il triangolo isoscele o scaleno (*triangulus habens duo aequalia latera* e *triangulus trium inaequalium laterum*); l'umanista piacentino, invece, sceglie di usare un lessico matematico latino ottenuto per lo più traslitterando le corrispondenti parole greche. In questa maniera *isosceles* e *scalenus* prendono il posto delle perifrasi di Campano, e *rectae parallelae* sostituiscono le *rectae aequidistantes* usate nella tradizione arabo-latina per indicare le parallele.

La fedeltà al testo greco appare di primo acchito una mera esigenza filologica, estranea quindi al contenuto matematico veicolato dal testo. Ciò nondimeno l'esattezza terminologica nasconde in realtà una diversa chiave interpretativa dell'opera di Euclide, che consente di rendere perspicuo ciò che fino ad allora appariva confuso. Si pensi ad esempio alla definizione di linea retta (I, def. 4) che per Valla, traduttore fedele dell'originale greco, è *quae ex aequo intra duo concluditur puncta* mentre per Campano *linea recta est ab uno puncto ad alium brevissima extensio, in extremitates suas eam recipiens*. La chiarezza della prima traduzione è senza dubbio maggiore della seconda. Ma dove l'apporto umanistico della filologia dimostra la sua utilità è nella chiarificazione dei diversi generi di enunciati che compongono il testo di Euclide e che non sempre erano distinti nell'edizione di Campano. Come rileva Valla:

> "Euclides manifesto problemata semper a theorematis distinguit, quam uspiam Campanus non videt considerasse" (*Georgii Valla Placentini Viri Clarissimi De Expetendis et Fugiendis Rebus Opus*, XI, 3).

Analogamente la confusione terminologica rende difficoltosa secondo l'umanista piacentino la comprensione delle definizioni di proporzione e proporzionalità contenute nel quinto libro degli *Elementi*.

> "Quoniam nonnullae Quinti Elementorum Euclidis diffinitiones paulo minus obviae videri legentibus possunt, nequidem a Campano recte expositae succurrendum difficultatibus paucis exixtimamus".

Valla a questo proposito distingue il termine αναλογια da λογος, traducendo il primo con *proportio* e il secondo con *ratio*. Campano, invece, spesso adopera lo stesso termine proportio per indicare sia il rapporto tra grandezze, la "proportione" di Pacioli, sia l'uguaglianza di rapporti, cioè la *proportionalitas*. Nel corso del Cinquecento molti studiosi, tra i quali Tartaglia, Commandino e Clavio, si soffermeranno sul quinto libro degli *Elementi* e sulla teoria delle proporzioni. L'apporto dell'umanesimo e dell'approccio filologico ai testi matematici promosso da Giorgio Valla costituirà un elemento fondamentale per l'edizione perspicua con la quale Commandino presenterà nel 1572 la teoria eudossiana delle proporzioni contenuta nel testo di Euclide.

Gli insegnamenti di Valla vennero recepiti e messi in pratica, prima ancora che dagli umanisti-matematici del tardo Cinquecento, da un allievo diretto del piacentino: Bartolomeo Zamberti. Seguendo le indicazioni contenute nel *De expetendis et fugiendis rebus* Zamberti dedica gran parte della prefazione alla sua edizione degli *Elementi* alla trattazione del ruolo della matematica all'interno della filosofia. Molti degli argomenti di Zamberti sul ruolo mediano delle matematiche, tra le scienze del "sensibile" e quelle dell' "intelligibile", derivano dal Commento al I libro degli *Elementi* di Proclo, già utilizzato peraltro dal suo maestro. Platone, considerato come il maggiore esponente del nesso matematica-filosofia, assume pertanto un ruolo assolutamente centrale nel breve schizzo di storia della geometria greca tracciato da Zamberti; tant'è vero che Euclide, che ancora viene considerato "megarensis", appare semplicemente come un filosofo platonico che si interessa di geometria (*philosophi platonici mathematicarum disciplinarum janitoris*).

L'edizione di Zamberti, che contiene anche altre opere euclidee (*Phaenomena, Catoptrica, Optica, Data*), si propone di emendare il testo degli *Elementi*, corrotti e oscurati dalla versione arabo-latina di Campano, *ille interpres barbarissimus*, responsabile di aver ridotto l'opera a tal punto che si dovrebbe intitolarla Chaos. Per far pulizia della barbarie dei goti e mettere ordine nel caos l'umanista veneziano rifiuta tutto il lessico arabo-latino, e adopera gli strumenti filologici dell'umanesimo per approntare la sua traduzione latina dal greco e riportare il testo, e specialmente il quinto libro, al suo stato originale. I risultati di Zamberti dal punto di vista del ricupero dell'opera non mancano: lo studioso, tra l'altro, riconosce che i libri XIV e XV erano opera di Ipsicle e anche che gli *Elementi* erano stata editi nell'antichità da Teone di Alessandria. I contributi esplicativi di Zamberti tuttavia, dal punto di vista matematico denunciano i limiti di una preparazione non all'altezza del testo di Euclide. Zamberti è un umanista alle prese con un testo matematico. Possiede gli strumenti filologici per una corretta restituzione della "lettera" ma è carente nel padroneggiare la struttura metamatica contenuta negli *Elementi*.

Per questa ragione il matematico Pacioli, dopo un tipografo (Radtlolt) e un umanista (Zamberti), sente l'esigenza ad appena quattro anni dall'edizione latina dal greco, di riproporre una versione aggiornata ed emendata dell'Euclide di Campano (*Euclidis megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo tralata,* Venezia, 1509). Secondo Frate Luca, Campano è un interprete fidissimo degli *Elementi*. Gli errori contenuti nella sua edizione derivano per lo più dai copisti, la cui "detestanda culpa" consiste nell'aver deformato e corrotto il testo originale. La convinzione che, nonostante interpolazioni e aggiunte, Campano avesse approntato una buona versione dell'opera di Euclide non risale al 1509, ma emerge già da un passo della *Summa*, in cui frate Luca parla dell'utilità dell'edizione dei testi classici per l'avanzamento delle scienze.

"E quel che se dici chel Campano commentò e così Boetio tengo, per quanto [h]o lecto, che solo ne fossero tradutori de greco al nostro latin sermone. E la discrepantia da quella di Boetio a quella del Campano altro non è se non chel Campano connette e lega per via de corretioni de mano in mano le sue conclusioni, che Boetio no. El perché la traduction di Boetio par più consona de verbo ad verbum che quella del Campano. Ma ancora le corretioni el Campano da sé non le mise poche, avenga che in Euclide non fosser poste, lui in certi volumi per altri anticamente discussi le trovò in margine postillate e lui dentro le inserì. Ma Boetio che de verbo ad verbum lo tradusse non le trovò in suo testo" (L. Pacioli, *Summa*, c. 106v).

Questo passo potrebbe sconcertare lo studioso moderno di storia della matematica, che conoscendo la vicenda della trasmissione degli *Elementi* durante il Medioevo, individua vistose inesattezze nelle considerazioni di fra' Luca dal Borgo. Pacioli, infatti, crede che Campano sia un traduttore dal greco, mentre il Novarese si configura come un commentatore di una versione degli *Elementi* tradotta dall'arabo in latino da Adelardo di Bath. Si riferisce inoltre ad una traduzione boeziana degli *Elementi*. A quale? Alcuni riferimenti nelle opere di Cassiodoro attestano l'esistenza di una versione latina di Euclide realizzata da Boezio. La traduzione, comunque parziale e limitata ai primi sei libri, probabilmente circolava nel corso del Medioevo. Il problema tuttavia è che al nome di Boezio erano ricondotti anche due trattati geometrici manoscritti, basati su compendi e commenti del testo euclideo e risalenti con ogni probabilità al X-XI secolo: *l'Ars geometriae et arithmeticae*, in cinque libri, e una *Geometria in due libri*. Pacioli si riferisce esplicitamente ad una traduzione boeziana "de verbo ad verbum", ed è pertanto presumibile che alluda ad una versione completa dal greco in latino, giudicata dal frate più fedele all'originale di quella del Campano, che, invece, contiene interpolazioni e commenti, successivamente incorporati nel testo in modo tale da stravolgere l'originale struttura del testo degli *Elementi*.

Ma a quale traduzione completa di Euclide da parte di Boezio allude Pacioli? È probabile che si tratti della stessa versione alla quale si riferisce Regiomontano, quando nella sua *Oratio introductoria in omnes scientias mathematicas*, pronunciata a Padova nel 1464, parla di una traduzione integrale in latino degli *Elementi* da parte di Boezio ("quamvis commentum non, ut in Graeco iacet, expresserit"), sulla base della quale sarebbero state realizzate poi le edizioni medievali di Adelardo, Alfredo e Campano ("illi quidem eleganter ac brevissime, iste vero lucidissime").

Nel vivo della *renovatio* matematica connessa alla rinascita dei classici scientifici greci, Pacioli partecipa pertanto all'attività frenetica degli umanisti e matematici dell'ambiente veneto. Ciò nondimeno il suo interesse principale resta quello divulgativo e applicativo. La scelta di ritornare a Campano e opporsi alla linea interpretativa Valla-Zamberti è motivata più che da ragioni di ordine filologico - delle quali peraltro Luca dal Borgo non può avere una adeguata competenza - da interessi di tipo pratico e divulgativo. L'Euclide del Campano, infatti, pur sollevando grandi problemi di esegesi, presenta agli occhi di Pacioli il vantaggio di una versione più facilmente comunicabile ed utilizzabile, in quanto riconducibile ad una trascrizione aritmetica di molte proposizioni geometriche.

Le correzioni e delucidazioni apportate da frate Luca all'edizione di Ratdolt del 1482, del resto, non sono determinanti per una più corretta edizione del testo, ma sono finalizzate prevalentemente ad una maggiore intelligibilità dell'opera. Pacioli, a questo proposito, interviene in primo luogo sulle figure che "in aliis codicibus inverse et deformate erant", riportandole "ad rectam symmetriam". Il matematico di Sansepolcro, malgrado dichiari di aver emendato ben 129 figure, si limita in realtà ad aggiugere per lo più i valori numerici alle linee che compongono i diagrammi e ad accompagnare ogni figura con il numero della proposizione corrispondente. La stragrande maggioranza dei diagrammi ricalca fedelmente la tradizione arabo-latina culminata con l'*editio princeps* di Ratdolt.

Se dalle figure si passa a considerare il testo, appare evidente che l'edizione curata da frate Luca è quasi identica a quella del 1482. L'edizione del 1509, tuttavia, contiene 146 nuovi commenti all'opera, quasi sempre introdotti dal termine “castigator”. I libri degli *Elementi* ai quali Pacioli aggiunge il numero maggiore di chiose sono nell’ordine il X (28 commenti) e il V (22 commenti). Anche in questi casi Pacioli interviene con una numerosa casistica di esempi numerici a chiarificare il libro sulle grandezze irrazionali, peraltro già aritmetizzato nella *Summa* alla maniera del Fibonacci, e il libro sulla teoria eudossiana delle proporzioni, nucleo centrale del progetto di matematizzazione del sapere promosso da Luca dal Borgo. L’edizione pacioliana degli *Elementi* include, infatti, anche il discorso inaugurale del corso sul V libro dell’opera di Euclide, che il frate matematico tenne a Venezia nella chiesa di San Bartolomeo l’11 agosto 1508.

L’edizione del 1509, pertanto, non apporta significative modifiche al testo degli *Elementi,* ma punta soprattutto all’intelligibilità dell’opera e alla sua possibile utilizzazione nelle arti e nelle discipline universitarie. Pacioli, a differenza di Zamberti, è soprattutto un matematico e guarda al testo non tanto in funzione del ricupero dell’originale, ma soprattutto in relazione alla sua comprensione e utilità.

11 - Luca Pacioli e la rivoluzione della stampa

Gran parte del merito di Luca Pacioli come matematico consiste nell’aver diffuso con molta efficacia la conoscenza matematica sia tra i “litterati” che tra i “pratici vulgari”. In questa operazione divulgativa frate Luca fu particolarmente abile a sfruttare l’innovazione tecnica più rivoluzionaria del periodo in cui visse: la stampa a caratteri mobili.

L’importanza dell’apparizione del libro nella diffusione e nello sviluppo delle conoscenze umane è un risultato storiografico abbastanza consolidato. Elisabeth L. Eisenstein parla addirittura di “rivoluzioni del libro”, alludendo appunto al ruolo preponderante della stampa nella promozione e nella diffusione di tre feonomeni culturali assolutamente centrali nella storia dell’Occidente: l’espansione della repubblica delle lettere che si registra durante il Rinascimento, la Riforma protestante e, infine, la nascita della scienza moderna. Il trapasso dalla cultura del manoscritto a quella tipografica, infatti, produsse effetti rilevanti nella diffusione della conoscenza: la costanza in ogni esemplare a stampa sia del testo che del corredo iconografico, la tiratura in numero elevato di copie e il prezzo contenuto rispetto al manoscritto, fecero del libro stampato il vettore privilegiato della comunicazione del sapere.

Tra i centri più attivi nella produzione di libri a stampa, Venezia tra il

XV e il XVI secolo costituiva quello più importante. Nella città lagunare le tipografie trovavano un terreno culturale ed economico particolarmente fertile, non soltanto per l'influenza positiva del centro universitario di Padova, che stimolava la stampa dei libri necessari per le facoltà dello Studium, ma anche per la centralità della Serenissima nella rete dei traffici commerciali, all'interno della quale viaggiava anche il prodotto librario. A Venezia, dal momento in cui nel 1469 Giovanni da Spira ricevette la concessione statale per l' "ars imprimendi libros", si erano sviluppate circa 200 aziende tipografiche, prevalentemente dedite alla pubblicazione di incunaboli afferenti al sapere tradizionale filosofico, teologico, religioso, letterario e giuridico. I libri di uso universitario infatti erano più facilmente collocabili sul mercato rispetto ai testi scientifici e a quelli classici di ispirazione umanistica. Nonostante questo aspetto conservatore della tipografia quattrocentesca, ravvisabile anche nei formati editoriali, che tendevano ad imitare quanto più possibile la struttura del codice manoscritto, gli stampatori veneziani e veneti diedero avvio ad una non trascurabile produzione di libri di scienza. In particolare occorre ricordare due editori che contribuirono più di altri alla pubblicazione di opere scientifiche e matematiche: Erhard Ratdolt e Aldo Manuzio.

Il primo, attivo a Venezia prima in società con Bernard Maler e Peter Loeslein (1476-1478), poi da solo (1480-1486), si dedicò quasi esclusivamente alla pubblicazione di opere scientifche, riguardanti soprattutto la geometria, l'astronomia e l'astrologia. Tra i libri pubblicati da Ratdold occorre ricordare peraltro il *Calendarium* di Regiomontano (Venezia 1476), primo incunabolo nel quale compare il frontespizio con tutte le indicazioni (autore, titolo, stampatore, luogo e data di pubblicazione) necessarie all'identificazione bibliografica dell'opera. Il libro di matematica più celebre stampato da Ratdolt fu però l'editio princeps dell'opera geometrica di Euclide: *Elementa in artem geometriae et Campani commentationes*, realizzata a Venezia nel 1482. Nella dedica del volume a Giovanni Mocenigo, Ratdolt sottolineava la novità della stampa di un libro "in hac mathematica facultate vel reliquarum disciplinarum nobilissima", e si vantava di aver corredato l'opera con figure geometriche a margine del testo, necessarie alla comprensione delle discipline matematiche. Le illustrazioni grafiche, ottenute mediante matrici in legno, costituivano agli occhi del tipografo di Augusta il pregio maggiore del volume. Mediante le xilografie di Radtolt veniva, infatti, riprodotta a stampa in un numero rilevante di esemplari la consuetudine iconografica degli *Elementi* tramandata dai codici manoscritti nell'edizione commentata di Campano da Novara.

Erhard Radtold era un editore specializzato in testi scientifici. Dai torchi della sua tipografia presero forma, tra gli altri, i volumi di Tolomeo (Ptolomeus Claudius, *Quadripartitum, Centiloquium cum commento Hali*, Venetiis, 1484) e di Albumasar, (*Introductorium in astronomiam, nella versione latina di Ermanno Dalmata, Auguste Vindelicorum*, 1489), il *Calendario* di Regiomontano, lo *Sphericum opusculum* di Sacrobosco, le *Tabulae astronomicae* di Alfonso X di Castiglia con i *Canones in tabulas Alphonsi* di Giovanni di Sassonia (Venetiis, 1483), la *Geographia* di Pomponio Mela, la *Magistralis compositio astrolabii* di Enrico Bate di Malines e *La nobel opera de arithmetica* di Pietro Borghi (Venetiis, 1484), che costituisce il secondo esemplare a stampa di un'opera della matematica abachistica dopo *L'arte de l'abacho* stampata a Treviso nel 1478.

Aldo Manuzio, invece, fu un tipografo dalla raffinata sensibilità umanistica e il suo programma editoriale era ispirato dal rigore filologico con il quale venivano trattate le opere classiche. Le innovazioni tecniche di Aldo, consistenti soprattutto nell'adozione dei caratteri italici in sostituzone dei vari gotici e romani, e nel piccolo formato del "libro da mano" o "enchiridio", si allineavano del resto con il gusto dell'eleganza e dello stile calligrafico propagandato dall'umanesimo. Ciò nonostante Aldo Manuzio non disdegnò la pubblicazione di opere scientifiche fortemente ispirate al rigore filologico degli umanisti; tant'è vero che stampò sia la raccolta degli *Scriptores astronomici veteres greci e latini* (Venetiis, 1499) sia il *De expetendis et fugiendis rebus opus* di Giorgio Valla (Venetiis, 1501).

Venezia, del resto, alla fine del XV secolo primeggiava fra le città europee per il numero delle tipografie e dei testi scientifici stampati e proprio nella città dei dogi si recò Luca Pacioli nel 1494 per pubblicare la *Summa*. L'editore di Pacioli era Paganino Paganini di Brescia, che aveva impiantato una stamperia nella Serenissima dedicandosi prevalentemente alla pubblicazione di opere, quali quelle di Bartolo da Sassoferrato, Baldo degli Ubaldi, Paolo di Castro, inerenti alle facoltà universitarie padovane di diritto canonico e civile, e alla stampa di libri di argomento religioso, come la monumentale Bibbia glossata da Nicolò della Lira, i *Sermones ad heremitas* pseudo-agostiniani, editi il 26 maggio 1487 in società con Giorgio Arrivabene da Mantova, e i numerosi messali e breviari tipici della devozione popolare. Quando frate Luca dal Borgo si rivolse a Paganino Paganini per pubblicare la *Summa* l'esperienza del tipografo nella stampa di libri matematici era pressoché nulla. Pacioli quindi dovette provvedere alla supervisione dei lavori e sicuramente alla correzione delle bozze. Come si evince dalla carta che chiude l'opera collaborò, infatti, con Paganini *die noctuque* al fine di approntare un'edizione raffinata della *Summa*.

Il ruolo rivestito da frate Luca nella stampa della sua monumentale enciclopedia matematica è indicativo nel rapporto che veniva istituendosi all'interno delle tipografie tra professori e stampatori, tra intellettuali e tecnici. Questa connessione tra il mondo dei dotti e quello dei "pratici vulgari" si rendeva particolarmente necessaria nel caso della stampa di libri matematici. Il controllo delle operazioni di calcolo, il disegno delle figure geometriche e dei diagrammi aritmetici e algebrici, e il rapporto tra il testo e le figure richiedevano, infatti, la presenza del matematico, se non altro come correttore di bozze. La *Summa*, a questo proposito, risulta uno dei primi libri di matematica che dedica particolare cura agli schemi grafici. Questi occupano sempre i margini esterni dei fogli, e generalmente sono in corrispondenza biunivoca con il testo, composto mediamente da cinquantacinque righe per pagina, scritto con caratteri semigotici e accompagnato dal numero di distinzione, capitolo e articolo al quale si riferisce. Senza l'ausilio delle figure, il testo, specialmente per le parti aritmetiche, algebriche e geometriche, risulterebbe del tutto inintelligibile. La parte scritta, che comunque usa abbreviazioni e simboli matematici debitamente esplicitati in apposite tabelle riassuntive, in molti casi consiste nell'illustrazione dei diagrammi e pertanto Pacioli provvede sempre a rendere perspicuo e chiaro il nesso tra testo e figura. Quando tratta di aritmetica e algebra solitamente la descrizione indica già esplicitamente a quale figura ci si sta riferendo. Nel caso invece della geometria o anche dei problemi contenuti nella nona distinzione è il numero d'ordine della questione proposta a rimandare il lettore dal testo alla figura.

Il problema degli schemi geometrici e dei diagrammi che accompagnano le opere di matematica doveva apparire particolarmente rilevante per i primi stampatori. Radtolt nella dedica al Mocenigo dell'editio princeps (1482) degli *Elementi* di Euclide si vanta di aver risolto brillantemente il problema grafico; e lo stesso Pacioli nella sua edizione del 1509 insiste particolarmente sulla correzione e sull'aggiunta delle figure, finalizzate a rendere più chiaro il testo degli *Elementi*. Probabilmente l'apporto dei matematici consisteva anche nel fornire i disegni che poi l'incisore utilizzava per realizzare le xilografie. A questo proposito occorreva una certa perizia nell'incidere le lettere e i numeri che accompagnavano la figura in modo speculare rispetto al disegno su carta, affinché poi sul foglio stampato fossero riprodotte esattamente lettere e numeri indispensabili per seguire i calcoli aritmetici e le dimostrazioni geometriche. La *Summa* non è certo esente da errori tipografici di questo genere ma considerato il numero complessivo delle xilografie, si può dire che il risultato finale potesse soddisfare Pacioli, che peraltro aveva seguito passo passo il lavoro degli stampatori.

Fig. 36 – Capolettera xilografica, Lettera L, affiancata dalla figura di Luca Pacioli

A testimoniare questo sodalizio tra il tipografo e il matematico c'è inoltre una capolettera xilografica, che riproduce la lettera L affiancata dall'immagine di frate Luca alle prese con una dimostrazione geometrica mediante l'ausilio del compasso.La xilografia, che ricorre più volte nella *Summa*, rappresenta quasi un sigillo grafico del lavoro svolto da Pacioli in collaborazione con Paganino Paganini.

I costi della stampa furono coperti interamente da Marco Sanuto, patrizio veneziano "costumatissimus astrologus, in Arithmetica eminentissiums, in Geometria excellentissimus", come lo definisce Luca dal Borgo nella lettera di ringraziamento che apre la *Summa*. La convergenza di interessi di un mecenate illuminato (Marco Sanuto), di un grande matematico (Luca Pacioli) e di un volenteroso tipografo (Paganino Paganini), aveva portato alla creazione di un incunabolo, prezioso non soltanto come prodotto commerciale – una copia della *Summa* costava 119 soldi come riferisce Leonardo da Vinci - ma soprattutto come prodotto culturale, in grado di raggiungere un pubblico potenziale inimmaginabile per qualsiasi codice manoscritto.

Il successo della *Summa*, che è una delle prime grandi opere scientifiche in volgare , dipende, infatti, oltre che dalla completezza degli argomenti trattati e dal discreto livello di precisione nella soluzione dei problemi, dal successo editoriale che essa ha avuto. Rispetto ai grandi trattati d'abaco in veste enciclopedica del XV secolo - si pensi ad esempio al codice L.IV.21 della Biblioteca degl'Intronati di Siena e al codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze - la *Summa*, ha avuto il notevole vantaggio di essere stata stampata e diffusa capillarmente. Un libro simile a quello di Pacioli, e cioè il *Triparty* di Nicole Chuquet, scritto nello stesso periodo in francese, restò quasi sconosciuto fino alla pubblicazione a stampa del 1880.

La fortuna dell'opera di frate Luca dal Borgo quindi è legata in parte all'effetto Gutenberg, che in quegli anni produsse una rivoluzione nel mondo dei libri e della cultura letteraria e scientifica. Pacioli fu uno dei primi matematici ad intuire la forza dirompente della stampa a caratteri mobili, sia sotto il profilo strettamente scientifico, sia sotto quello economico; tant'è vero che nel 1508 inoltrò al Senato Veneto la richiesta del copyright per le sue opere, molte delle quali attendevano peraltro ancora la prima pubblicazione.

I rapporti tra Pacioli e il suo editore della *Summa* dovettero conservarsi buoni se nel 1509 frate Luca affidò ancora ai torchi del Paganini la stampa della *Divina proportione* e dell'edizione degli *Elementi* di Euclide. Questa volta però al padre Paganino si era aggiunto anche il figlio Alessandro, che debuttò come stampatore proprio con l'edizione della *Divina proportione*, per la quale realizzò gli elegantissimi caratteri tipografici. Le innovazioni di Alessandro, prima ancora che riguardare le scelte editoriali tendenti a catturare un nuovo pubblico mediante la pubblicazione di opere letterarie e volgari anziché di carattere universitario, furono di tipo tecnico. Alessandro, infatti, incise i nuovi caratteri romani che sostituirono i semigotici utilizzati nella *Summa* e contribuirono, insieme con il formato *in quarto*, più agile rispetto all' *in folio* del libro del 1494, a rendere l'edizione della *Divina proportione* elegante e raffinata, degna del confronto con le aldine.

Il rapporto di collaborazione tra il tipografo e il matematico per la pubblicazione a stampa della *Divina proportione*, fu inoltre caratterizzato dalla realizzazione:

a. delle tavole xilografiche che chiudono la prima parte dell'opera e riproducono i poliedri regolari e "dependenti" sulla base dei disegni di

Leonardo da Vinci ;

b. delle tavole architettoniche, che raffigurano tra l'altro la Porta Speciosa e gli elementi fondamentali della colonna e dell'architrave;

c. delle figure inerenti al testo del *Libellus de quinque corporibus regularibus* tratte da modelli chiaramente ispirati al manoscritto di Piero della Francesca ;

d. delle lettere capitali antiche, che diffondevano per mezzo della stampa lo stile dell'epigrafia latina, riprodotto con riga e compasso sulla base delle figure guida del cerchio e del quadrato .

Tutte queste caratteristiche tipografiche fecero del volume della *Divina proportione* un prodotto editoriale nuovo, destinato ad avere enorme successo nel mondo degli artisti, dei matematici e dei teorici di prospettiva. Per la realizzazione di quest'opera si rese necessaria la stretta collaborazione del calligrafo, dell'incisore e del matematico. Pacioli, infatti, ricorda all'inizio del Trattato dell'architettura, pubblicato nel volume del 1509, di essere "occupatissimo per la commune utilità de li presenti e futuri in la expeditione de le nostre opere e discipline matematici, quali son con ogni solicitudine in procinto de loro impressione". Frate Luca era convinto che per "la communa utilità de li presenti e futuri" fosse necessaria la diffusione del sapere matematico. Per realizzare il suo scopo seppe sfruttare più di ogni altro matematico l'invenzione di Gutenberg, e questa illuminante lungimiranza, unita al livello senza dubbio discreto dei contenuti matematici da lui esposti, gli consentì di propagandare, oltre che la propria immagine, anche la sua concezione matematica del mondo, basata sull'idea che le proporzioni costituissero il linguaggio universale delle arti e delle scienze.

12 - Luca Pacioli: una nuova immagine della matematica

Sull'importanza della matematica per le arti e per le tecniche avevano insistito già alcuni artisti e teorici del Rinascimento come Lorenzo Ghiberti, Leon Battista Alberti e Leonardo da Vinci, che nel delineare il programma enciclopedico delle conoscenze richieste al pittore, allo scultore e all'architetto, avevano riservato alla geometria e all'aritmetica un ruolo fondamentale. Nel curriculum universitario degli studi, inoltre, le arti del quadrivio rivestivano nel Quattrocento una insostituibile funzione propedeutica per l'esercizio della medicina, della filosofia naturale e quindi della teologia. Nel sistema educativo umanistico, infine, le discipline matematiche venivano in molti casi considerate importanti per la formazione culturale dell'uomo rinascimentale. Il ruolo della matematica, in ogni caso era, tuttavia, subordinato ai fini educativi che nei diversi ambienti culturali di lingua latina o volgare venivano perseguiti. Perfino all'interno della tradizione abachistica, la matematica, che costituiva la parte più consistente per la formazione dei mercanti, degli ingegneri, degli agrimensori e dei tecnici, era considerata per lo più in funzione dell'utilità che poteva fornire all'esercizio quotidiano delle arti e dei mestieri, e non per il suo valore fondativo del sapere.

Con Luca Pacioli, invece, la matematica diventa una vera e propria philosophia prima, fondamento e garanzia di certezza di tutto lo scibile. Nelle lettere che aprono la *Summa* e la *Divina proportione* il frate di Sansepolcro, infatti, disegna un progetto culturale di matematizzazione del sapere che poi ripeterà nella prolusione al corso su Euclide tenuto nella Scuola di Rialto nel 1508. Il nucleo centrale di tale programma è costituito dalla universalità delle matematiche, scienze *in primo gradu certitudinis* sulle quali si basano tutte le arti e le scienze inventate dall'uomo. Nel corso del Cinquecento l'idea della matematica come disciplina universale diventa un *topos* letterario che ricorre nelle prefazioni delle maggiori opere matematiche del secolo: dalla *Practica Arithmeticae* di Cardano al *General Trattato* di Tartaglia, dall'*Algebra* di Bombelli alle traduzioni e commenti dei classici di Commandino e di Clavio. L'opera di Pacioli, in molti casi, costituisce una delle fonti di origine di quel *topos* letterario.

13 - Le proporzioni e la matematizzazione delle scienze e delle tecniche

Nella lettera che apre la *Summa* la motivazione della matematizzazione di tutta la conoscenza resta sospesa fra la riconosciuta utilità a fini pratici delle discipline matematiche e la certezza che esse forniscono al sapere. Da una parte Pacioli mette in evidenza il ruolo fondamentale dell'artimetica e della geometria nelle arti meccaniche, nel commercio e nei mestieri; dall'altra insiste sulle garanzie di esattezza della conoscenza fornite dalle matematiche alle altre arti liberali e a tutte le discipline insegnate nelle Università (giurisprudenza, medicina, filosofia, teologia).

Non sono, però, soltanto l'utilità e la certezza a rendere la matematica universalmente applicabile. C'è una motivazione più radicale che Pacioli pone alla base del suo progetto: l'idea che il mondo sia stato creato da Dio per mezzo dei numeri, delle figure geometriche e delle proporzioni. La *Summa* è, infatti, attraversata da una sottile vena metafisica che emerge nell'epistola dedicatoria e riaffiora saltuariamente in quelle sezioni del libro – come la prima e la sesta distinzione – in cui si registrano impennate speculative. La scienza delle proporzioni, in questi casi, è estesa all'intero scibile umano non soltanto perché la geometria è una disciplina utile ed esatta, ma perché il mondo stesso è costruito con le figure geometriche dei poliedri regolari, caratterizzati da una proporzione costante tra lo spigolo e il diametro della sfera nella quale sono inscritti.

Il progetto culturale di Pacioli esposto nella lettera dedicatoria a Guidubaldo presuppone una drastica revisione del sistema delle arti e delle scienze codificato dalla scolastica medievale, e presente negli ordinamenti delle Università. I mestieri manuali dei tecnici (come il geometra, l'ingegnere, il mercante-ragioniere, lo stratega militare, l'idraulico, il meccanico, il pittore, lo scultore e l'architetto), vengono infatti affiancati da Pacioli alle attività "intellettuali" dei dotti (il medico, il giurista, il musicista, il docente universitario delle discipline del trivio e del quadrivio, il filosofo e il teologo) in virtù della comune radice di tutte le arti e le scienze, che è appunto la matematica.

Nella dedica a Guidubaldo frate Luca procede ad esaminare la funzione insostituibile della matematica nei vari campi della conoscenza cominciando dall'astrologia (astronomia) alla quale – rileva Pacioli – "chi è colui che, non dico dotto, ma ancor manco asai che mediocre erudito, el qual chiaramente non veda quanto è connexa e necessaria[?]". Nell'architettura, poi, l'utilità della geometria e delle proporzioni è evidente; come, del resto, - rileva frate Luca - mostra "Vitruvio in suo volume e Leon Battista degli Alberti Fiorentino in sua perfetta opra de architectura [...] proportionando suoi magni et excelsi hedifitii", tra i quali viene ricordato il palazzo ducale di Urbino, "el qual non solo a la vista subito veduto piaci, ma ancor più reman stupefato chi con intelletto va discorrendo, con quanto artifitio e ornamento è stato composto".

Pacioli affianca Vitruvio all'Alberti per sottolineare sia il Rinascimento dell'architettura nel XV secolo, sia il carattere matematico di questa disciplina che la poneva di diritto tra le scienze *in primo gradu certitudinis*. Vitruvio aveva codificato nel *De architectura* i canoni di bellezza classici, ricorrendo alla scienza delle proporzioni. Leon Battista Alberti, che il frate aveva conosciuto a Roma nel 1471, rinnova il progetto vitruviano elaborando i principi dell'architettura matematica del Rinascimento.

Nel *De re aedificatoria*, stampato per la prima volta nel 1485, l'architetto fiorentino dedica il primo libro soprattutto alla funzione del disegno, considerato come l'anello di congiunzione tra la matematica e l'architettura, riservando gli altri due libri dell'opera alla trattazione dei materiali e dei metodi di costruzione.

Il primo libro (la teoria) è tuttavia inscindibile dagli altri due (la pratica). La matematica è, quindi, per l'Alberti alla base dell'architettura. L'esempio del palazzo di Urbino, a questo proposito, è significativo per almeno due aspetti: 1) la struttura razionale dell'edificio, al quale lavorarono architetti del calibro del Laurana e di Francesco di Giorgio Martini; 2) il richiamo alla corte dei Montefeltro in cui l'architettura – come dimostra la *Patente al Laurana* (1468) di Federico – era un'arte matematica molto apprezzata.

L'architettura inizia il trittico delle discipline "artistiche" che si fondano sulla matematica. A questa infatti seguono la pittura e la scultura, anch'esse caratterizzate dall'uso delle scienze matematiche nella riproduzione della bellezza naturale. Quanto alla prima, Piero della Francesca l'aveva caratterizzata mediante tre elementi: *commensuratio, desegno e colorare*.

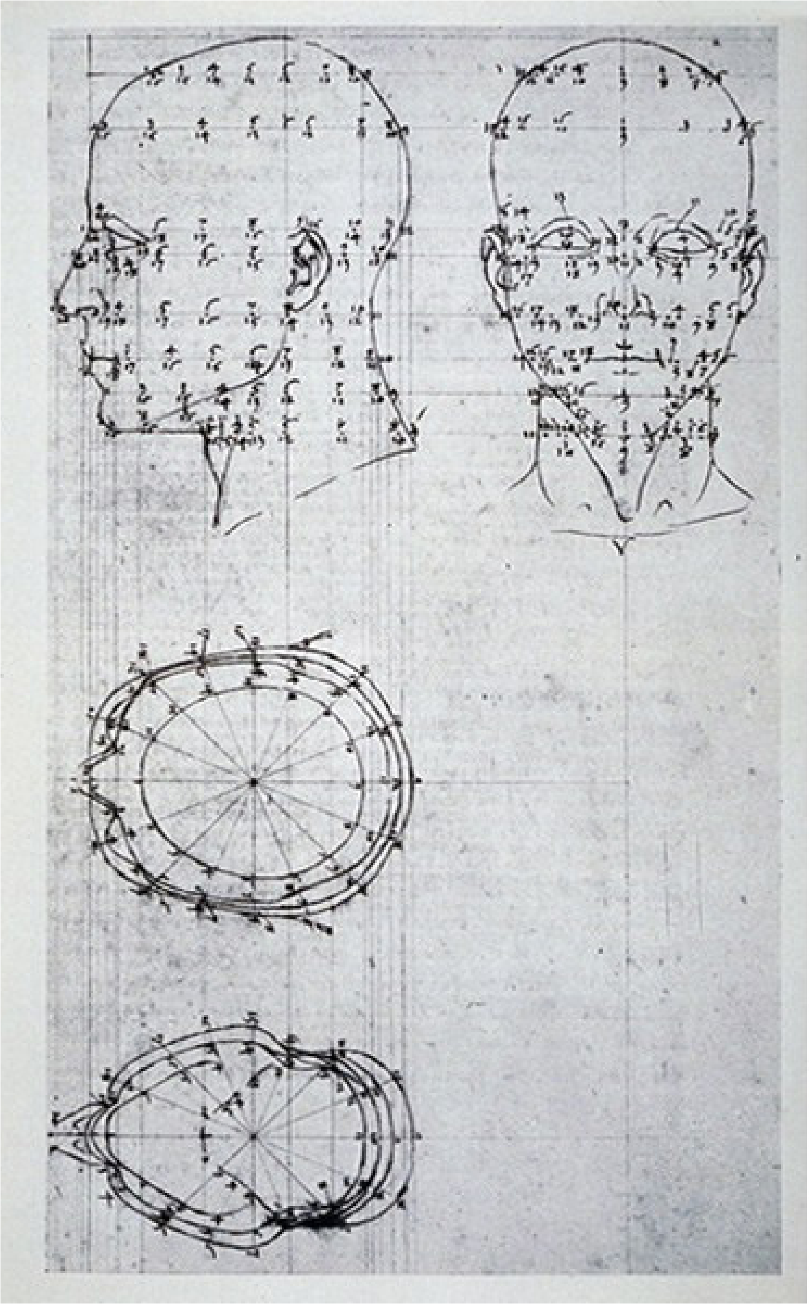


Fig. 37 - Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi,* tavola XXVI dell'edizione critica a cura di G. Nicco Fasola, Firenze, 1942, 1984

Il primo elemento, la *commensuratio*, implica l'uso della *prospectiva artificialis*.

> "La perspectiva - scrive Pacioli -, se ben si guarda, senza dubio nulla serebbe se queste [le matematiche] non li se accomodasse, comme a pieno dimostra el Monarca a li tempi nostri de la pictura Maestro Piero dei Franceschi nostro conterraneo, e assiduo le la excelsa V.D. casa familiare; per un suo compendioso trattato che de l'arte pictoria e de la lineal forza in perspectiva compose".

La citazione del *De prospectiva pingendi* serve a Pacioli a dimostrare come alla pittura sia necessaria la prospettiva, "la quale – aveva scritto Piero – discerne tucte le quantità proportionalmente commo vera scientia, dimostrando il degradare et acrescere de onni quantità per forza de linee". Ebbene, la geometrizzazione della pittura tramite la prospettiva e la implicita strutturazione matematica dello spazio non si limita a costituire una caratteristica riscontrabile solo in Piero della Francesca, ma rappresenta una innovazione rivoluzionaria accettata dai maggiori pittori rinascimentali. Se si esclude Leonardo, che a quest'epoca il frate ancora non aveva conosciuto, la lista dei prospettici con "li quali in diversi luoghi discorrendo" Pacioli ha maturato una visione matematica della pittura, comprende i migliori pittori italiani del Quattrocento: Gentile e Giovanni Bellini, Sandro Botticelli, Filippino Lippi, Domenico Ghirlandaio, il Perugino, Luca da Cortona, Mantegna, Melozzo da Forlì e Marco Parmigiano. Questi pittori - afferma il frate - "sempre con libella e circino lor opre proportionando a perfection mirabile ducano; in modo che non humane ma divine negli ochi s'apresentano". "Libella e circino", cioè riga e compasso, sono gli strumenti fondamentali per la costruzione dello spazio prospettico e quindi per il proporzionamento degli oggetti nella scena dipinta. Il pittore non sarebbe in grado di portare l'opera "a pefection mirabile" senza l'ausilio della geometria.

Un analogo discorso riguarda gli scultori e i lapicidi, tra i quali Pacioli cita Andrea Verrocchio e il Pollaiolo, Giuliano e Benedetto da Maiano, Antonio Rizzo e Alessandro Leopardi. Anche la scultura, come l'architettura e la pittura, è infatti una disciplina che usa la matematica: in questo caso è tuttavia la teoria delle proporzioni del corpo umano ad essere maggiormente richiesta agli artisti. Lo stesso Alberti aveva sottolineato l'importanza della matematica nella scultura quando nel *De statua* paragonava l'arte dello scultore a quella di Zeusi alle prese con la statua di Giunone realizzata per gli abitanti di Crotone. Come Zeusi scelse le membra migliori di cinque belle fanciulle così – dice Alberti – “in questo medesimo modo ho io scelti molti corpi, tenuti da coloro che più sanno, bellissimi, e da tutti ho cavate le loro misure e proporzioni, delle quali avendo poi fatto comparazione […], ho prese da diversi corpi e modelli, quelle mediocrità, che mi son parse le più lodate” (L.B. Alberti, *De statua,* in *Opere volgari,* Firenze, Bonussi, 1847, vol. IV, p. 180).

Alle cosiddette arti figurative (pittura, scultura, architettura) segue la menzione della musica, la quale “chiaro ci rende lei del numero, misura, proportione e proportionalità, esser bisognosa”. Sulla musica Pacioli non si dilunga molto, ricordandone soltanto l’utilità per il culto divino; ma che essa fosse una disciplina matematica è attestato dall’appartenenza alle arti del quadrivio, insieme ad aritmetica, geometria ed astronomia. Nel 1484 inoltre si ebbe la prima edizione a stampa del *De institutione Musica* di Boezio, dove la teoria delle proporzioni era posta a fondamento della pratica musicale. Le consonanze armoniche perfette, ottava, quinta e quarta, erano infatti racchiuse, come aveva insegnato Pitagora, nei rapporti fra i primi quattro numeri interi (1/2 per l’ottava; 2/3 per la quinta, 3/4 per la quarta). La conoscenza delle proporzioni aritmetiche, geometriche e armoniche, inoltre, era indispensabile per la comprensione dei vari sistemi di intonazione, e dei diversi *tonoi* teorizzati dagli antichi.

Anche la cosmografia – afferma Pacioli - dimostra “quanto li sia necessario el numero, la misura e la proportione”, come evidenziano Eratostene, Strabone e Tolomeo, “quando, de tutto lo universo mondo debitamente proportionando lor gradi in una piccola carta, provincie, cità, castelli, e siti marittimi e mediterranei hanno redatto”.

Mentre l’allusione alla musica e alla cosmografia, da tempo considerate discipline matematiche, è del tutto in linea con la tradizione, l’inserimento delle arti meccaniche tra le discipline matematiche risulta innovativa: queste – sostiene frate Luca - “toltoli de mano la squadra, el sexto, con la lor proportione, non hanno che si peschino”. Se si escludono Ruggero Bacone, Ugo di San Vittore e alcuni fisici occamisti, il disprezzo per le arti meccaniche nel Medioevo è comune pressoché a tutte le correnti filosofiche. Nell’opera di Pacioli le arti meccaniche, così come l’arte del commercio, acquistano uno statuto epistemologico rispettabile proprio grazie all’uso delle matematiche. Basti pensare, del resto, all’importanza che il frate assegna ad un’arte matematica “derivata” quale è quella militare, in cui “tutte sue machine e strumenti [...] commo bastioni, ripari, bombarde, briccole, trabocchi e cetera, con tutte le artigliarie e ingegni sempre con forza de' numeri, mesura e lor proportioni si troveranno fabricati e formati".

Dell'arte militare Pacioli dice di aver più volte discusso con i maggiori condottieri del suo tempo sulla base degli autori classici di strategia, come Frontino e Vegezio. La conclusione a cui perviene Pacioli è che "nullo degno exercito, o a obsedione o defensione deputato, de tutto provveduto se po' dire se in quello non si trovi ingegneri e nuovo machinatore particularmente ordinato".

Il sapere degli ingegneri e dei tecnici militari aveva una lunga tradizione che dal mondo romano e arabo era filtrata, attraverso le compilazioni medioevali come quelle di Villard de Honnecourt, Konrad Kyeser e Guido da Vigevano, fino alla prima generazione degli ingegneri del Rinascimento (Jacopo Fontana, Mariano Taccola, Ridolfo Fioravanti e Roberto Valturio). Ciò nonostante il sapere dei tecnici militari era stato sempre emarginato dalle considerazioni dei dotti. Luca Pacioli cerca di riallacciare il rapporto dei condottieri contemporanei con gli autori classici e si incontra con strateghi e ingegneri militari come Camillo Vitelli e Giovan Giacomo Trivulzio, "de parte in parte discorrendo per li antichi volumi Quinto Curtio, Frontino, Vegetio e gli altri che de re militari hanno scritto [...]; le qual cose certamente tutta l'aperta experientia de la felicissima Vostra paterna memoria [Federico da Montefeltro] a l'universa Italia el feci manifesto".

Sulla scia di Boezio e di Isidoro di Siviglia, l'autore della *Summa* estende poi l'importanza della matematica anche alle scienze del trivio. Così la grammatica, la retorica, la poetica e la dialettica in una maniera o nell'altra necessitano - sostiene Pacioli - del numero e della misura. La grammatica, infatti, non può fare a meno del numero, sia nelle regole della scrittura, sia nella distribuzione degli accenti (grave, acuto e circonflesso); la retorica "con debito numero" distingue le parti di un'orazione; la poesia prescrive canoni numerici "per mesura e bilancia de tutti suoi armonici versi" e la dialettica, infine, "senza el suffragio di queste doi sorelle, Arithmetica e Geometria e del loro essenzial vinculo proportione, appare non poter per alcun modo in tutto esser manifesta". La filosofia, dal canto suo, ricorre spesso alle dimostrazioni matematiche, come si può vedere in alcuni passi delle opere aristoteliche "dove con ogni cura la proportione de' mobili, motori e moti, e lor potentie dimostra. E in quel de celo e mundo altro non revolta che circuli, corpi, sphere e lor proportioni" . Tutte la arti liberali, quindi, necessitano della base matematica.

Della Medicina - afferma il frate - altro “non acade addure se non quello che de sotto nel trattato de proportioni e proportionalita se dirà; dove se concluderà senza loro intelligentia al subsidio de la humana corporal salute per niun mbodo poterne venire”. Perfino la Giurisprudenza - e qui Pacioli cita il celebre Bartolo da Sassoferrato - non può fare a meno delle proporzioni e nemmeno la teologia “senza la notitia de la arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita possi intendere”.

L’estensione del numero è quindi universale. Pacioli infatti con molta cura si preoccupa di ribadire la necessità della matematica per tutte le discipline che in quel periodo venivano insegnate nelle Università, oltre che naturalmente per le arti meccaniche e per quelle che successivamente saranno chiamate “belle arti” (pittura, scultura, architettura). Ogni campo del sapere quindi deve strutturarsi matematicamente se vuole essere annoverato fra le scienze. La ragione di ciò risiede nella convinzione che il mondo sia stato creato mediante la matematica:

> “Tutte le cose create - conclude Pacioli - sian nostro spechio chè niuna si troverà che sotto numero, peso e mesura non sia constituta, commo è ditto da Salomone nel secondo de la Sapientia. Hanc denique preoculis Summus Opifex in celestium terrestriumque rerum dispositione semper habunt. Dum orbium motus; cursusque syderum et planetarum omnium ordinatissime disponeret . Hec quando ethera firmabat sursum. Et appendebat fundamenta terre, et librabat fontes aquarum. Et mari terminum suum circundabat legemque ponens aquis ne transirent fines suos, cum eo erat cuncta componens etc.

È quindi la struttura matematica dell’universo a giustificare l’estensione a tutte le discipline della geometria e dell’aritmetica. Con questa sottile vena metafisica “Frater Magister Luca de Burgo Sancti Sepulcri, ordinis minorum, sacre theologiae Magister” dedica la *Summa* ad “Illustrissimum principem sui Ubaldum Duces Montis Feretri, Mathematice discipline cultorem serventissimum”, alla cui corte, centro dell’umanesimo matematico, il libro poteva trovare la più calda accoglienza.

L’*Epistola dedicatoria* della *Divina proportione* (1498) presenta un programma di matematizzazione del sapere analogo a quello di quattro anni prima. Da una parte Pacioli insiste sull’utilità che le matematiche recano ad ogni campo dello scibile umano; dall’altra legittima la loro applicabilità universale con ragioni metafisiche concernenti la struttura geometrica del mondo. Circa l’utilità delle matematiche Pacioli ritiene che essa sia un riflesso della verità,

> "e però magiormente le cose vere sirano a noi utili e proficue, perché di queste se non vero ne pervene. Ma de le vere, commo afferma Aristotele e Averrois, le nostre mathematici sono verissime e nel primo grado de la certezza e quelle sequitano ogni altre naturali".
>
> Senza la certezza della matematica ogni altra scienza si ridurrebbe ad un coacervo di opinioni infondate, inutili per risolvere le necessità pratiche. Pertanto - conclude frate Luca – le discipline matematiche, che in passato consentirono agli antichi egizi di scoprire le cause dell'eclisse, meritano in futuro "più magnanima" e ampia considerazione:
>
> "Conciosia che dicte mathematici sieno fondamento e scala de pervenire a la notitia de ciascun altra scientia per esser loro nel primo grado de la certeza affermandolo el philosopo; così dicendo: Mathematice enim scientie sunt in primo gradu certitudinis et naturales sequuntur eas. Sonno commo è dicto le scientie mathematici discipline nel primo grado dela certezza e loro sequitano tutte le naturali. E senza lor notitia fia impossibile alcun altra bene intender".

Alla certezza delle matematiche si aggiunge una ragione più profonda che rende lo studio di queste scienze meritevole di essere perseguito. La matematica, infatti, non è soltanto la madre delle scienze e delle arti ma costituisce anche il linguaggio con il quale Dio ha scritto il libro del mondo,

> "e nella Sapientia ancora è scripto quod omnia consistunt in numero pondere et mensura, cioé che tutto ciò che per lo universo inferiore e superiore si squaterna quello de necesità al numero, peso e mensura fia sottoposto. E in queste tre cose l'Aurelio Augustino in *De Civitate Dei*, dici el summo opefice summamente esser laudato, perché in quelle fecit stare ea que non erant. Per la cui amorevole exhortatione comprendo molti de tal fructo suavissimo de utilità ignari doversi dal torpore e mental sonno exveghiare e con ogni studio e solicitudine ad inquirere quelle al tutto darse. E sia cagione in esse el seculo al suo tempo renovarse. E con più realtà e prestezza in cadun loro studio de qualunche scientia ala perfection venire".

Nelle ultime due righe di questo passo si legge la motivazione profonda che spinge Pacioli ad impegnarsi in questa apologia delle matematiche: "E sia cagione in esse el secolo al suo tempo renovarse. E con più realtà e prestezza in cadun loro studio de qualunche scientia ala perfection venire". Il rinascimento della civiltà risiede per frate Luca nella rinascita delle matematiche. Le arti e le scienze infatti si basano sulla certezza e la verità di queste discipline. Dalla loro verità deriva, poi, l'utilità pratica e il miglioramento della civiltà; diventa perciò necessario impegnarsi seriamente nello studio delle matematiche in modo che "sia cagione in esse, el seculo al suo tempo renovarse".

Per mostrare come dalle scienze matematiche derivi il miglioramento e la rinascita della società Pacioli si dilunga a specificare il loro uso nella costruzione di ordigni militari, di fortificazioni, di ponti, di strumenti di difesa, che "sempre con forza de numeri, mensura e lor proportioni se trovaranno fabricati e formati". L'ingegneria militare, argomento particolarmente caro sia Ludovico il Moro che a Galeazzo Sanseverino, occupa un posto di primo piano nelle considerazioni di frate Luca. L'arte della guerra, infatti, "non è possibile senza la notitia de Geometria, Arithmetrica e proportione, egregiamente poterse con honore e utile exercitare. E mai niun degno exercito finalmente a obsidione o defensione deputato de tutto proveduto se pò dire, se in quella non se trovi ingegnieri e novo machinatore particular ordinato".

I casi storici che corroborano la tesi di Pacioli sono molteplici e spaziano dall'uso degli specchi ustori di Archimede fino alla rocca di Urbino di Federico da Montefeltro, le decorazioni della quale contengono formelle in cui si raffigurano gli strumenti bellici, costruiti mediante l'applicazione della matematica all'arte della guerra. Tra le macchine da guerra frate Luca annovera "bombarde, briccole, trabochi, mangani, rohonfee, baliste, catapulte, arieti, testudini, grelli, gatti, con tutte altre innumerabili machine, ingegni e istrumenti" descritti nei trattati di Jacopo Fontana, Mariano Taccola, Aristotele Fioravanti, Francesco di Giorgio Martini e Roberto Valturio . Tra le armi di "offensione" compare anche la "bombarda", che costituì una delle applicazioni più rilevanti della polvere da sparo e produsse una vera e propria rivoluzione nell'arte della guerra. La conseguenza più immediata dell'introduzione della polvere da sparo fu, oltre al cambiamento delle strategie militari, la necessità di modificare la costruzione delle fortezze difensive, cioè di "roche, torri, revelini, muri, antemuri, fossi, ponti, turrioni, merli, matelletti e altre fortezze nelle terri, città e castelli". Anche le strutture difensive – rileva Pacioli – al pari delle macchine offensive necessitano di "geometria e proportioni". Pertanto la vittoria nelle guerre e la conservazione del benessere "de le grande e picole republiche" dipende dalla preparazione matematica degli ingegneri che accompagnano gli eserciti.

"Non peraltro sì vittoriosi furon li antichi Romani, commo Vegezio, Frontino e altri egregii autori scrivano, se non per la gran cura e la diligente preparatione de ingiegneri e altri armiragli da terra e da mare, quali senza le mathematici discipline, cioè Arithmetica, Geometria e proportioni, non è possibile lor sufficientia".

Alla citazione di due classici dell'arte militare, come Vegezio e Frontino, frate Luca affianca, com'è sua consuetudine, un autore moderno dell'arte militare come Roberto Valturio, che "in la degna opera sua de instrumentis bellicis intitulata" descrive in dettaglio queste macchine da guerra . Valturio, la cui opera *De re militari* fu stampata a Verona nel 1472, viene considerato da Pacioli come un diretto continuatore dell'ingegneria militare dei romani. Dalle opere storiche di Livio, Plinio e dello stesso Cesare, il "peritissimo ariminese" – secondo Frate Luca – trasse la descrizione delle macchine belliche contenute nell'opera dedicata a Sigismondo Pandolfo Malatesta, signore di Rimini e condottiero tra i più valenti del Quattrocento.

Il desiderio di riallacciare direttamente il rapporto con la civiltà classica induce Pacioli a ricondurre l'opera di Valturio, che comunque non è un tecnico ma un uomo di lettere che compila in latino un trattato sull'arte militare, a quella di Frontino e Vegezio. Occorre tuttavia rilevare che nella gran parte le macchine descritte nel libro *De re militari* derivano da quelle di Mariano Taccola e quindi dalla tradizione medievale .

Rispetto ai trattati degli ingegneri si aggiunge però una novità, costituita dalle reminiscenze antiche che affiorano spesso nell'opera di Valturio. I disegni di macchine sono, infatti, corredati dal testo e non si limitano a lasciare tutta la spiegazione alla figura. È proprio la commistione tra la cultura "dotta" dell'umanista e la tradizione tecnica degli ingegneri a sollecitare l'interesse di Pacioli verso l'opera del riminese. Il libro *De re militari*, terminato nel 1455, conobbe, soprattutto dopo la stampa, una diffusione notevole e costituì uno dei punti di riferimento della stessa ingegneria militare di Leonardo. Frate Luca, inoltre, ritiene che proprio all'opera di Valturio si ispiri il programma decorativo dei fregi del palazzo di un altro grande condottiero dell'epoca, Federico da Montefeltro:

"E de ditte machine e instrumenti – scrive – ad litteram, commo in suo libro ditto ariminese pone, e de molte altre più assai, la felicissima memoria del congionto e stretto affine de Vostra Celsitudine Federigo Feltrense, Illustrissimo Duca de Urbino, tutto el stupendo hedificio del suo nobile admirando palazzo in Urbino circumcirca da piede in un frixio de viva e bella pietra, per man de dignissimi lapicidi e sculptori ordinatamente feci disporre".

Il programma iconografico di Federico, ispirato al *De re militari* di Valturio, fu poi completato da Francesco di Giorgio Martini, che della tradizione degli ingegneri militari del Rinascimento è un diretto ed eccellente continuatore. I *Trattati di architettura civile e militare* dell'architetto non sono menzionati da Pacioli, ma l'opera, che insieme a quella di Valturio ispira la zoccolatura del Palazzo di Urbino, è senza dubbio da annoverare tra le maggiori di ingegneria militare del Quattrocento.

Qui si trovano descritte, come nei codici di Taccola, le macchine da guerra citate in rapida rassegna da Pacioli, e riprodotte, insieme alle macchine usate nell'ingegneria e nell'architettura civile (alzacolonne, argani, mulini idraulici, ecc), nelle 72 formelle di Urbino.

La lunga digressione sull'ingegneria militare, che compare in questa epistola dedicatoria, è senza dubbio connessa all'interesse di Ludovico il Moro e del suo generale Galeazzo Sanseverino per l'arte militare; tant'è vero che frate Luca non manca di incensare anche Francesco Sforza, "la sanctissima vostra paterna memoria", del quale a Todi, nella chiesa di San Fortunato, si conservano – ricorda Pacioli – "grossissimi canapi publici pendenti, quali per un ponte al Tevere a sua famosa conquista victoria dispose". Il ricordo delle imprese militari di Francesco Sforza non va però considerato soltanto in termini di adulazione del frate verso il suo duca, ma rientra nel più ampio progetto di diffusione della cultura matematica agli ambienti dei tecnici e in particolare dei capitani di ventura.

Rispetto alla lunga trattazione dell'arte militare, gli altri usi della matematica sono appena accennati in questa dedicatoria della *Divina proportione*. Pacioli si limita a ricordare l'importanza della matematica nella teologia di Duns Scoto, che nel suo "2° libro de le Sententie" dimostra di "haver inteso tutto el sublime volume del nostro perspicacissimo Megarense philosopho Euclide". Ribadisce en passant l'importanza della geometria nella comprensione delle opere aristoteliche di "physica, metaphysica, Posteriora". Si sofferma invece un po' di più sull'astronomia, che nell'epistola dedicatoria della *Summa*, non aveva ricevuto la dovuta attenzione. L'analisi di Pacioli su questa scienza è piuttosto chiara: vi è penuria di buoni astronomi poiché le discipline matematiche vertono in stato di abbandono.

> "Non peraltro è penuria deli boni astronomi se non per diffetto de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità. E de li 10 li nove in lor iudicii se regano per Tavole, tacuini e altre cose calculate per Ptholomeo, Albumasar, Ali, Alfragano, Geber, Alphonso, Bianchino, Prodocimo e

altri, li quali per la poca advertentia deli scriptori posseno esser maculate e vitiate e per consequente in quelle fidandose in grandissimi et videnti errori pervengano, non con pocho danno e preiudicio de chi in lor se fidan".

L'esigenza di rinnovare l'astronomia, tornando a calcolare direttamente le posizioni di stelle e pianeti e non semplicemente ricorrendo alle tavole già compilate, è uno degli obiettivi dell'attività scientifica di Johannes Müller. Pacioli, in questo passo non cita né l'astronomo di Königsberg, né il suo maestro Georg Peurbach; ciò nondimeno, proprio come Regiomontano, individua la ragione della crisi dell'astronomia nella mancanza di studi matematici che consentano di controllare direttamente le posizioni indicate nelle tavole e contribuire così attivamente allo sviluppo della scienza astronomica.

La dedica a Ludovico il Moro si conclude con un elenco degli usi della matematica che in parte ricalca quello della *Summa*, ma che risulta meno dettagliato e più scarno soprattutto per quanto concerne le arti figurative e le matematiche applicate. Nel rapido elenco degli usi della matematiche contenuto nel *Compendium de divina proportione* occupa un posto di rilievo la figura di Bartolo da Sassoferrato, del quale frate Luca elogia l'opera intitolata *Tiberina* (*De fluminibus*, Roma, 1483), dove si tratta della ridefinizione dei confini dei terreni dopo le inondazioni del Tevere "in quelle parti, maxime de Peroscia verso Deruta". Il libro di Bartolo da Sassoferrato, ricordato anche nella *Summa*, è connesso all'efficacia "de tutte leggi municipali" nel "giudicare del'alluvioni e circumluvioni de l'aque per la excessiva loro inundatione" e a questo proposito esso rappresenta per Pacioli un buon esempio di applicazione della geometria pura alla soluzione di questioni pratiche, poiché l'autore "sempre con figure Geometriche rectilinee e curvilinee, de parte in parte el nostro perspicacissimo Philosopho Euclide alegando se resse, e quello con grandissima subtilità concluse" .

La conclusione della dedica a Ludovico il Moro è un lapidario bilancio della cultura matematica e scientifica del tempo. Frate Luca denuncia la penuria dei buoni matematici, dovuta, a suo avviso, alla "rarità dei buoni precettori". Del resto la scarsa diffusione del sapere matematico – rileva Pacioli - è causata anche dalla difficoltà della disciplina. Come afferma, infatti, il proverbio: "aurum probatur igni et ingenium mathematicis, che in sentenza vol dire chel bono ingegno ale mathematici fia attissimo a cadauna scientia, conciosiacosaché le sienno de grandissima astrazione e sutigliezza, perché sempre fuora de la materia sensibile se hano a considerare e veramente son quelle, commo per tusco proverbio se costuma, che spaccano el pelo in l'aire. Per la qual cosa l'anticho divin philosopho Platone non immeritamente l'à ditto dil suo celeberrimo gymnasio ali de geometria inexperti denegava quando un breve al sommo dela sua principal porta, a lettere magne, intellegibile pose de queste formali parolle videlicet: Nemo huc geometrie expers ingrediatur; cioè chi non era buon geometra li non entrasse".

Dopo aver ricordato l'aneddoto platonico e aver aggiunto la leggenda raccontata da Vitruvio del sacrificio di 100 buoi compiuto da Pitagora "per la invenctione de l'angolo retto", a Pacioli non resta che ringraziare il Moro che, istituendo la "lectura publica" di matematica a Milano, consente ai suoi sudditi di accrescere la loro conoscenza della geometria e dell'aritmetica e favorire la rinascita delle scienze. L'insegnamento di matematica, naturalmente tenuto da Pacioli, si basa sul "sublime volume del prefato Euclide", e a quanto riferisce il frate

> "È già ali suoi X libri dignissimo fine imposto, interponendo sempre a sua theorica anchora la pratícha nostra, a più utilità e ampla intelligentia de quelli. E ala presente expedition di questo el residuo del tempo deputando".

Il *Compendium de divina proportione*, si pone pertanto in linea di continuità con la *Summa*. Se l'opera pubblicata nel 1494 costituisce il testo di riferimento per la volgarizzazione dei primi dieci libri degli *Elementi*, le ultime fatiche di Pacioli consentono di completare la volgarizzazione di Euclide, tramite la trattazione degli ultimi libri della sua maggiore opera. L'estensione della matematica alle arti e alle scienze presuppone, infatti, lo studio degli *Elementi* e in particolare la teoria delle proporzioni contenuta nel V libro.

14 - Un'antica-nuova immagine della natura.

Il progetto di matematizzazione del sapere promosso da Pacioli nelle due lettere di dedica che aprono la *Summa* e la *Divina proportione* è guidato dall'idea che il linguaggio delle arti e delle scienze sia costituito dalle proporzioni. Al quinto libro degli *Elementi* di Euclide, che innerva la sesta distinzione della *Summa*, frate Luca dedicò, infatti, anche una serie di lezioni alla Scuola di Rialto, precedute da una prolusione tenuta l'11 agosto 1508, nella chiesa di S. Bartolomeo. Di fronte a un uditorio di circa cinquecento persone composto da teologi, filosofi, medici, letterati, artisti ed eminenti personaggi della Venezia di inizio Cinquecento, il reverendo padre e maestro di teologia Luca Pacioli da Borgo Sansepolcro tenne un discorso sulla virtù e la forza delle proporzioni che ripete a grandi linee quello esposto nella *Summa*.

L'idea "metafisica" che guida il progetto culturale di frate Luca è che il libro del mondo sia scritto con i caratteri della geometria e della matematica e con la "sintassi" delle proporzioni. Gli antichi filosofi, infatti, "chiaro cognoscivano che de niuna cosa in natura mai era possibile haver notitia, se la loro proportione non se intendeva. Conciosiacosa che, tutti li nostri studi di qualunche facultà si vogliano sienno per intender la convenientia da una cosa a un'altra". Le proporzioni, quindi, non solo costituiscono il fondamento delle arti liberali e di discipline come la medicina e il diritto, ma risultano necessarie anche per l'arte "de' sartori" e del "fabro lignario", per i "maestri de navi, barci, navilii, galee", per "l'arte ancora de militia" e del "fabroferraro", per "li testari e lanari", per i mercanti, per i "lapicidi e muratori" e per tutti gli "artefici, maxime meccanici". "Se tu ben discorri – rileva infatti Pacioli - in tutte le arti tu troverai la proportione de tutte esser madre e regina e senza lei niuna poterse exercitare" .

L'immagine matematica del mondo che traspare in alcuni passi della *Summa* trova una più nitida definizione nel *Compendium de divina proportione*, presentato alla corte di Ludovico il Moro nel 1498. In quest'opera infatti, Pacioli individua nella "proportione havente el mezzo e doi extremi" il rapporto geometrico mediante il quale il Creatore ha plasmato i cinque poliedri regolari dei quali, secondo la cosmologia platonica del *Timeo*, sono costituiti gli elementi archetipici del mondo: acqua, aria, terra, fuoco ed etere cristallino. La teoria euclidea delle proporzioni riceve così una più accentuata fondazione metafisica con l'ausilio della dottrina timaica, rivisitata da Pacioli alla luce delle sue considerazioni filosofiche circa la *divina proportione*. Quest'ultima non è altro che la sezione aurea di un segmento, una proporzione che compare tra l'altro anche nella costruzione del dodecaedro, il poliedro regolare con il quale, in base alla tradizione neoplatonica, era composto il quinto elemento, e cioè l'etere.

"Questa nostra proportione Duca – scrive pertanto Pacioli rivolgendosi al Moro - è de tanta prerogativa e de excellentia degna quanto dir mai se potesse per respecto dela sua infinita potentia. Conciosiaché senza sua notitia moltissime cose de admiratione dignissime né in filosofia né in alcun altra scientia mai a luce poterieno pervenire".

L'eccezionalità e la "infinita potentia" della proporzione aurea sono connesse inoltre a quelli che frate Luca definisce i suoi tredici "mirabili effetti", e che in realtà sono semplicemente le proprietà della proporzione continua a:x= x:(a-x), ricavate dagli *Elementi* di Euclide. L'esposizione in volgare delle proposizioni contenute nel XIII libro dell'opera euclidea è, però, condotta dal matematico di Sansepolcro sulla base dell'idea che la "proportione havente el mezzo e doi extremi" sia divina. L'uso dell'aggettivo "divina" è giustificato da Pacioli in base a cinque analogie di stampo teologico:

1) come Dio, la "proportione havente el mezzo e doi extremi" è unica;
2) come la Trinità è una sostanza in tre persone, così la proporzione "aurea" consta di tre termini;
3) "Commo Idio propriamente non se pò diffinire né per parolle a noi intendere, così questa proportione non se pò mai per numero intendibile asegnare, né per alcuna quantità rationale exprimere, ma sempre fia occulta e secreta e da li mathematici chiamata irrationale";
4) come Dio è immutabile ed è tutto in ogni parte così questa proporzione è invariabile e si riproduce all'infinito;
5) infine, come la virtù celeste o quintessenza permette di creare i quattro elementi della natura e conferire ad essi l'essere, così la divina proporzione permette di creare il dodecaedro, il più complesso e nobile dei poliedri regolari, composto di dodici pentagoni regolari. I cinque corpi regolari inoltre "non è possibile fra loro poterse proportionare, né da la sphera poterse intendere circumscriptibili, senza la nostra detta proportione" , che pertanto costituisce l'essenza necessaria del mondo.

La sezione aurea è quella parte di un segmento media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante. Nella proporzione aurea, perciò, il rapporto dell'intero segmento con la parte maggiore è uguale al rapporto della parte maggiore del segmento con quella minore. Se indichiamo con a un segmento e con x la sezione aurea, allora la proporzione aurea è la seguente: a: x = x : (a-x).

La divina proporzione - rileva Pacioli - appartiene alla classe di quelle formate da tre termini, e quindi delle proporzioni "continue", nelle quali l'estremo maggiore sta al medio come il medio al minore. Si tratta quindi di una proporzione che si instaura alle stesse condizioni delle altre, ma che mantiene la sua peculiarità in quanto si configura come una proporzione continua nella quale il rapporto tra il termine medio e gli estremi non può variare e si mantiene costantemente fisso e irrazionale:

> "Dico similmente dela nostra divina – spiega frate Luca - observare le medesime conditioni, cioé che sempre fra li suoi tre termini, cioé mezzo e doi extremi, invariabilmente contene doi proportioni sempre de una medesima denominatione. La qualcosa de l'altre o sienno continue o ver discontinue pò in infiniti varii modi advenire. Però che ale volte fra lor tre termini sirà dupla, alcuna volta tripla; et sic in ceteris discorrendo per tutte le communi specie. Ma fra 'l mezzo e li extremi de questa nostra non è possibile poterse variare commo se dirà".

La divina proporzione è in questo aspetto simile alla figura di Cristo: come Gesù si incarna diventando uomo a tutti gli effetti e restando allo stesso tempo Dio, così la proporzione aurea è una proporzione come tutte le altre del suo genere e pur tuttavia possiede proprietà uniche, che giustificano l'attribuzione dell'aggettivo «divina». Luca dal Borgo insiste frequentemente nel mostrare la similitudine tra le proprietà matematiche della "proportione havente le mezzo e doi extremi" e gli attributi di Cristo, in quanto ritiene che essa sia la cifra, "dal ciel mandata", con la quale Dio ha creato il mondo in numero, pondere et mensura. L'universo, secondo frate Luca, si presta infatti ad essere studiato tramite la matematica proprio perché è strutturato geometricamente mediante la "divina proporitone". La geometria euclidea viene così ammantata nel libro di frate Luca da un abito teologico di matrice cristocentrica, che funge da corredo filosofico all'esposizione delle proposizioni degli *Elementi* relative alla divina proporzione.

Rispetto alla teoria delle proporzioni contenuta nella sesta distinzione della *Summa* l'aspetto che maggiormente caratterizza l'opera successiva di Pacioli è costituito, del resto, proprio dall'enfasi posta sul concetto di divina proportione. La "proportione havente el mezzo e doi extremi" appare agli occhi del matematico di Sansepolcro come il rapporto che presiede alla formazione del cosmo. L'universo risulta strutturato, infatti, in base ad un'analisi "cristallografica" delle cose che associa a ciascuno dei cinque elementi naturali (acqua, aria, terra, fuoco ed etere) un poliedro regolare (ottaedro, icosaedro, cubo, tetraedro e dodecaedro). La generazione dei solidi a sua volta deriva dalle proporzioni fisse tra lo spigolo e il diametro della sfera nella quale i cinque poliedri regolari sono inscritti. La sintassi del mondo è costituita pertanto dalle proporzioni, e tra queste gioca un ruolo fondamentale la "proportione havente el mezzo e doi extremi", che consente di generare sia l'icosaedro che il dodecaedro.

La corrispondenza stabilita nella *Divina proportione* tra i cinque sferoidi e i cinque elementi segue abbastanza fedelmente l'analisi platonica contenuta nel *Timeo*, anche se la fonte diretta del frate è soprattutto il commento del Campano agli *Elementi* di Euclide, più che il testo di Platone. L'elemento di novità nella "lettura" del *Timeo* da parte di Luca dal Borgo è costituito semmai dall'importanza rivestita dalla proporzione aurea nel porre in essere gli elementi ed il mondo stesso. Scrive infatti Pacioli:

"sì commo Idio l'essere conferesci a la Virtù Celeste, per altro nome detta quinta essenza, e mediante quella a li altri quatro corpi semplici, cioè a li quatro elementi (terra, aqua, aire e fuoco) e per questi l'essere a cadauna altra cosa in natura, così questa nostra santa proporzione l'esser formale dà, secondo l'antico Platone in suo Timeo, a esso cielo, atribuendoli la figura del corpo detto duodecedron, altramente corpo de 12 pentagoni, el quale [...] senza la nostra proportione non è possibile poterse formare".

L'essere dei quattro elementi empedoclei dipende dalla quinta essenza e questa, a sua volta, non può esistere senza la divina proporzione. L'incastro geometrico del mondo si regge, quindi, sul segreto della sezione aurea. Ecco perché Pacioli, nei capitoli centrali del *Compendium*, si preoccupa di definire 13 teoremi relativi alla divina proporzione, onde rilevarne armoniche implicazioni cosmiche. Ciò che maggiormente conta tuttavia per frate Luca è l'aver mostrato come le proporzioni, e in particolare la "divina proportione", rappresentino non soltanto il linguaggio universale delle arti e delle scienze ma anche il criterio con il quale Dio ha plasmato, mediante i poliedri regolari, gli elementi del mondo.

La concezione geometrica del mondo e la conseguente centralità delle matematiche nel sistema delle scienze costituiranno nel corso del XVI secolo una delle tematiche più discusse tra matematici e filosofi. La lingua della scienza moderna sarà scritta con i caratteri della matematica e con la grammatica delle proporzioni. È celebre la metafora galileiana del "Libro della Natura" contenuta nel *Saggiatore* (1623). Quella di Galileo è un'immagine emblematica della rivoluzione concettuale che diede origine alla scienza moderna; ma a ben vedere i primi tratti di quell'immagine sono disegnati nelle opere di Luca Pacioli.

Fig. 38 *Luca Pacioli*, monumento realizzato da Franco Alessandrini (1994) e collocato in P.za San Francesco a Sansepolcro

Indicazioni bibliografiche

Boncompagni B., *Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Dank di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra' Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro)*, in «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche» 1879, pp. 352-438.

Ciocci A., *Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento,* Bari, Cacucci, 2003.

Ciocci A. (a cura di), *Pacioli: letture e interpretazioni,* Selci-Lama, Tipografia L'Artistica, 2012.

Giusti E. e Maccagni C. (a cura di) *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento,* Firenze, Giunti, 1994.

Giusti E., (a cura di), *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento.* Atti del convegno internazionale di studi. Sansepolcro 13-16 aprile 1994, Città di Castello, Petruzzi, 1998.

Giusti E. e Martelli M. (a cura di), *Pacioli 500 anni dopo,* Atti del Convegno di Studi, Sansepolcro 22/23 maggio 2009, Selci-Lama, Tipografia L'Artistica, 2010.

Hernàndez-Esteve E. e Martelli M. (a cura di), *Before and after Luca Pacioli,* Atti dell' Incontro Internazionale 17/18/19 Giugno 2011, Sansepolcro-Perugia-Firenze, Selci-Lama, L'Artistica, 2011.

M. Martelli (a cura di), *Luca Pacioli a Milano,* Biblioteca del Centro Studi «Mario Pancrazi», Umbertide, UB, 2014.

M. Martelli (a cura di), *Luca Pacioli e i grandi artisti del Rinascimento italano,* Biblioteca del Centro Studi «Mario Pancrazi», Umbertide, UB, 2016.

Edizioni degli scritti di Luca Pacioli

Summa de arithmetica, proportioni et propotionalita, Con spesa e diligentia. E opfitio del prudente homo Paganino de Paganini da Brescia. Nella excelsa città de Vinegia, 1494.
Divina proportione. Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria, A Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat, Venetiis, Anno Redemptoris nostre 1509.
Euclidis megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis Opera a Campano interprete fidissimo traslata[…] Lucas Paciolus theologus insignis[…] iudicio castigatissimo detersit, Venetiis impressum per probum virum Paganinum de Paganinis, 1509.
Summa de arithmetica, proportioni et propotionalita: Novamente impressa. Et per esso Paganino di novo impressa. In Tusculano, sula riva dil laco Benacense, 1523.
De Divina Proportione di Luca Pacioli, Milano, Officina Bondoni di Verona, 1956.
Trattato de l'Architettura, in A. Bruschi (a cura di), *Scritti rinascimentali di architettura,* Milano, Il Polifilo 1978, pp. 88-144.
De divina proportione, ed. Fontes Ambrosiani, XXXI, a cura di A. Marinoni, Milano, 1982.
Trattato di partita doppia, a cura di A. Conterio con introduzione e commento di B. Yamey, Venezia, Albrizzi, 1994.
Summa de arithmetica, proportioni et propotionalita, Venezia, Paganini, 1494; ristampa anastatica, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, con introduzione di E. Giusti, Roma 1994.
De las cuentas y las escrituras di Luca Pacioli, estudio introductorio, traducción, notas y presentación por Esteban Hernández-Esteve, con una reproducción fotográfica del original, AECA, Madrid, I ed. 1994, II ed. 2009.
Tractatus ad discipulos perusinos (Codice Vaticano Urbinate 3129), a cura di G. Calzoni e G. Cavazzoni, Perugi,a 1996.
De viribus quantitatis, trascrizione di M. Garlaschi Peirani dal codice n°. 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna. *Prefazione* di A. Marinoni, Milano, Entre Raccolta Vinciana, 1997.
Divina Proportione, ristampa anastatica dell'edizione di Venezia del MDIX, Nino Aragno Editore, 1999.

Tractatus ad discipulos perusinos, a cura di G. Calzoni e G. Cavazzoni, Perugia, Delta Grafica, 2007.
De ludo scachorum, in *Gli scacchi di Luca Pacioli. Evoluzione di un gioco matematico,* Sansepolcro, Aboca Museum Edizioni, 2007.
De viribus quantitatis, ristampa anastatica del codice n°. 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna e commentario di F. Honsell, G. Bagni, *Curiosità e divertimenti coi numeri,* Sansepolcro, Aboca Museum Edizioni, 2009.
De divina proportione, ristampa anastatica del ms. Langues Etrangères n°. 210 della Biblioteca Universitaria di Ginevra e *Antologia della divina proportione* a cura di Duilio Contin, Sansepolcro, Aboca Museum Edizioni, 2010.
De divina proportione, ristampa anastatica dell'edizione di Venezia del MDIX (Nino Aragno Editore, 1999).

Indice delle illustrazioni

due rettangoli di 12-4 si sovrappongono su quel quadrato minore.
Fig. 14 – Leonardo da Vinci: a sinistra Icosaedro vacuo (*Codice Atlantico*, f. 518r); a destra Icosaedro appeso ad un laccio, come nelle tavole del manoscritto della *Divina proportione* di Pacioli (*Codice Atlantico*, f. 930r).
Fig. 15 - Manoscritto M dell'Istitut de France (Parigi), f. 80v. (Bibl. Ambrosiana di Milano).
Fig. 16 - Fig. 14 – Luca Pacioli, *Compendium de divina proportione*, Icosaedro vacuo (Biblioteca Ambrosiana di Milano).
Fig. 17 - Leonardo da Vinci, *Codice Madrid II*, F.140v. Traduzione in volgare dell'inizio del libro I degli *Elementi* di Euclide
Fig. 18 - Leonardo, *Codice Forster I,* Londra, Victoria and Albert Museum, *f. 7r.*
Fig. 19 - L. Pacioli: El duodecedron piano solido over vacuo ha 30 linee equali over lati, quali in lui causano 60 anguli superficiali, e ha 20 anguli solidi, e ha 12 basi over superficie che lo contengono. E queste sonno tutte pentagone, de lati e anguli fra loro tutti equali, como appare in sua forma (*Divina proportione,* cap. 52, c. LVIr).
Fig. 20 - A. Dürer: Quintum corpus fit omnibus suis superficiebus pentagonis & est duodecim planarum, pentagonarum & viginti aequorum triangulorum angulorum, et triginta acutorum laterum, quemadmodum illud expansum, deinde compactum (*Underweysung der messung,* ed. lat. Camerarius, 1532, p. 146-7).
Fig. 21 – Luca Pacioli, *De viribus quantitatis*, quesito LXXII, Giochi matematici.
Fig. 22 – Luca Pacioli, *De viribus quantitatis*, quadrati magici.
Fig. 23 - Albrecht Dürer, *Melencolia 1* (1514).
Figg. 24 a /b - Albrecht Dürer, *Melencolia 1*, particolari.
Fig. 25 – *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Dedica.
Fig. 26 - Luca Pacioli, *Summa*, *Distinctio II, Tract. II*. I numeri congruo-congruenti.
Fig. 27 - Luca Pacioli, *Summa*, *Distinctio IX, Tract. XII*.
Fig. 28 - Luca Pacioli, *Summa, Trattato di geometria*, c. 50v. Problemi con dodecaedri.
Fig. 29 - Luca Pacioli, *Compendium de divina proportione,* Bibliothèque Publique et Universitaire di Ginevra (ms. Langues Etrangères n. 210), miniatura: il frate del Borgo nell'atto di presentare il manoscritto a Ludovico il Moro.

Fig. 30 – Luca Pacioli, *Compendium de divina proportione*, dedica a Pier Soderini, ed a stampa, Paganino de' Paganini, 1509.
Fig. 31 – Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, Paganino de' Paganini, Venezia, 1509 (ed a stampa), Frontespizio.
Fig. 32 – Luca Pacioli, *Tractato de l'Architectura*, La PORTA SPECIOSA, in *De Divina Proportione*, Venezia, Paganino de' Paganini, 1509.
Fig. 33 - Disegni relativi al *casus 3* del *Libellus,* sulla costruzione delle facce decagonali del dodecaedro tronco.
Fig. 34 – Lettera "A", dall'*Alphabeto Dignissimo Antiquo* di Luca Pacioli.
Fig 35 – Luca Pacioli, *De ludom scachorum*, Aboca Edizioni, Sansepolcro, 2007.
Fig. 36 – Capolettera xilografica, Lettera L, affiancata dalla figura di Luca Pacioli.
Fig. 37 - Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, tavola XXVI dell'edizione critica a cura di G. Nicco Fasola, Firenze, 1942, 1984.
Fig. 38 - Luca Pacioli, monumento realizzato da Franco Alessandrini (1944) e collocato in P.za San Francesco a Sansepolcro.

Indice dei nomi

Una selezione dei volumi della collana
delle *Edizioni dell'Assemblea* è scaricabile dal sito

www.consiglio.regione.toscana.it/edizioni

Ultimi volumi pubblicati:

Roberto Manera
Madonna di Montenero - Patrona della Toscana
Laura Antonelli, Andrea Giaconi
Una famiglia in lotta. I Martini tra fine Ottocento,
Grande Guerra, Resistenza e Deportazione
Luca Grisolini
Vallucciole, 13 Aprile 1944
Caterina Testi (a cura di)
Eroi nella Grande Guerra
Silvia Selleri, Marco Fontani (a cura di)
A cent'anni dalla scomparsa di Ugo Schiff
Giulia Coco, Francesca Fiorelli Malesci (a cura di)
Firenze in salotto
Intrecci culturali dai riti aristocratici del Settecento
ai luoghi della sociabilità moderna
Cristina Frulli, Francesca Petrucci (a cura di)
L'Accademia di Belle Arti di Firenze
negli anni di Firenze capitale 1865 - 1870